

Fiche 2 : repère et coordonnées

Huit exercices pour maîtriser les calculs de coordonnées dans l'espace :

- coordonnées de vecteurs, milieux, parallélogramme ;
- alignement de points, avec un paramètre ;
- coplanarité de vecteurs et de points ;
- décomposition d'un vecteur dans une base ;
- coordonnées des sommets d'un parallélépipède ;
- centre de gravité d'un tétraèdre ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- coordonnées de chaque vecteur écrites ;
- proportionnalité ou système justifié ;
- troisième équation **vérifiée** pour la coplanarité ;
- conclusion avec la propriété utilisée.

Le modèle de rédaction d'une coplanarité par coordonnées

« Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 0)$ et $\vec{v}(0; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles). On cherche a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$2 = a, 5 = 2a + b, 1 = b$$

Les deux premières équations donnent $a = 2$ et $b = 1$. La troisième est vérifiée ($b = 1$). Donc $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$: les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires. »

- Vérifie d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **non colinéaires**.
- Écris les **trois équations**, résous-en deux, **vérifie la troisième**.
- Conclue par une phrase : « coplanaires » ou « non coplanaires ».

Les pièges classiques

- Oublier de **vérifier la troisième équation** : sans elle, tu n'as pas prouvé la coplanarité.
- Se tromper de sens dans $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; \dots)$: c'est **arrivée moins départ**.
- Conclure « non coplanaires » alors que le système n'est pas écrit.
- Utiliser le théorème de coplanarité avec deux vecteurs colinéaires.

Un signe moins oublié dans une coordonnée fait basculer un point à l'autre bout de l'espace. Relis tes soustractions.

Exercice 1 (★) : coordonnées, milieu, parallélogramme

Dans un repère de l'espace, on donne :

$$A(1; 2; -1), B(3; -1; 2), C(0; 4; 1), D(2; 1; 3).$$

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et du milieu J de $[CD]$.
3. Calculer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer le point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme.
5. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC .

Exercice 2 (★★) : alignement, avec un paramètre

1. Les points $A(1; 2; 3)$, $B(3; 5; 9)$, $C(-1; -1; -3)$ sont-ils alignés ?
2. Les points $A(1; 2; 3)$, $B(3; 5; 9)$, $D(2; 3; 5)$ sont-ils alignés ?
3. Déterminer le réel m tel que les points $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(m; 3; -4)$ soient alignés.

Exercice 3 (★★) : coplanarité de vecteurs

1. Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 0)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$, $\vec{w}(2; 5; 1)$ sont-ils coplanaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 1)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$, $\vec{w}(1; 1; 1)$ sont-ils coplanaires ?
3. Déterminer le réel m tel que $\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(2; -1; 0)$, $\vec{w}(4; 3; m)$ soient coplanaires.

Exercice 4 (★★) : coplanarité de quatre points

On donne $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(1; 1; -1)$, $E(1; 1; 1)$.

1. Montrer que A , B , C ne sont pas alignés.
2. Les points A , B , C , D sont-ils coplanaires ?
3. Les points A , B , C , E sont-ils coplanaires ?

Exercice 5 (★★) : décomposer dans une base

On donne $\vec{u}(1;1;0)$, $\vec{v}(0;1;1)$, $\vec{w}(1;0;1)$ et $\vec{t}(3;4;3)$.

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{t}$ dans cette base.

Exercice 6 (★★) : un parallélépipède en coordonnées

On donne $A(0;0;0)$, $B(2;1;0)$, $D(0;3;1)$, $E(1;0;4)$.

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède (avec les arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[AE]$ issues de A).

1. Déterminer les coordonnées de C , F , H , G .
2. Calculer les coordonnées du milieu de $[AG]$ et de celui de $[BH]$. Que constate-t-on ?

Exercice 7 (★★★) : le centre de gravité d'un tétraèdre

On reprend $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;4;1)$, $D(2;1;3)$.

On note G l'isobarycentre de A , B , C , D : ses coordonnées sont la moyenne de celles des quatre points.

1. Calculer les coordonnées de G .
2. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Montrer que G est le milieu de $[IJ]$.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Les vecteurs $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{v}(2;4;7)$ sont colinéaires.
2. Les vecteurs $\vec{u}(1;0;0)$, $\vec{v}(0;1;0)$, $\vec{w}(0;0;1)$ forment une base de l'espace.
3. Les vecteurs $\vec{u}(1;0;2)$, $\vec{v}(0;1;1)$, $\vec{w}(1;1;3)$ sont coplanaires.
4. Les points $O(0;0;0)$, $B(1;2;3)$, $C(2;4;6)$ sont alignés.
5. Le vecteur nul est coplanaire avec deux vecteurs quelconques.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **coordonnées de vecteurs**, de **milieux** et un **parallélogramme** (exercices 1 et 6).
- Un **alignement** de points, souvent avec un paramètre (exercice 2).
- Une **coplanarité** de vecteurs ou de points, avec vérification de la troisième équation (exercices 3 et 4).
- La **décomposition d'un vecteur** dans une base (exercice 5).
- Un **centre de gravité** (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

- Pour $A(1;2;3)$ et $B(3;-1;0)$, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?
 - $(2;-3;-3)$
 - $(4;1;3)$
 - $(-2;3;3)$
 - $(2;3;3)$
- Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$ pour $A(1;2;3)$ et $B(3;-1;0)$?
 - $(2;-3;-3)$
 - $\left(1;-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$
 - $(4;1;3)$
 - $\left(2;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$
- Pour $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$ et $C(0;1;0)$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont :
 - non colinéaires
 - colinéaires
 - égaux
 - nuls
- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si :
 - $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
 - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
 - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
 - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- Pour $A(0;0;0)$, $B(2;1;0)$ et $C(3;3;1)$, quel point D rend $ABCD$ parallélogramme ?
 - $D(-1;-2;-1)$
 - $D(1;2;0)$

- C. $D(1; 2; 1)$
 D. $D(5; 4; 1)$
6. Dans l'exercice 1, avec $A(1; 2; -1)$ et $B(3; -1; 2)$, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?
 A. $(-2; 3; -3)$
 B. $(2; 3; 3)$
 C. $(2; -3; 3)$
 D. $(4; 1; 1)$
7. Dans l'exercice 2, quelle valeur de m rend alignés $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(m; 3; -4)$?
 A. $m = 3$
 B. $m = 6$
 C. $m = 2$
 D. $m = 4$
8. Dans l'exercice 3, les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 0)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$, $\vec{w}(2; 5; 1)$ sont-ils coplanaires ?
 A. Non
 B. On ne peut pas savoir sans calcul supplémentaire
 C. Seulement si l'origine est incluse
 D. Oui, car $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$
9. Dans l'exercice 6 (parallélépipède avec $A(0; 0; 0)$, $B(2; 1; 0)$, $D(0; 3; 1)$, $E(1; 0; 4)$), quelles sont les coordonnées de C ?
 A. $(2; 4; 1)$
 B. $(2; 3; 1)$
 C. $(0; 3; 1)$
 D. $(2; 1; 1)$
10. Dans l'exercice 7, quelles sont les coordonnées de l'isobarycentre G de $A(1; 2; -1)$, $B(3; -1; 2)$, $C(0; 4; 1)$, $D(2; 1; 3)$?
 A. $(2; 2; 2)$
 B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)$
 C. $(6; 6; 5)$
 D. $(1,5; 1,5; 1,5)$