

Fiche 2 : repère et coordonnées

Huit exercices pour maîtriser les calculs de coordonnées dans l'espace :

- coordonnées de vecteurs, milieux, parallélogramme ;
- alignement de points, avec un paramètre ;
- coplanarité de vecteurs et de points ;
- décomposition d'un vecteur dans une base ;
- coordonnées des sommets d'un parallélépipède ;
- centre de gravité d'un tétraèdre ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- coordonnées de chaque vecteur écrites ;
- proportionnalité ou système justifié ;
- troisième équation **vérifiée** pour la coplanarité ;
- conclusion avec la propriété utilisée.

Le modèle de rédaction d'une coplanarité par coordonnées

« Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 0)$ et $\vec{v}(0; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles). On cherche a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$2 = a, 5 = 2a + b, 1 = b$$

Les deux premières équations donnent $a = 2$ et $b = 1$. La troisième est vérifiée ($b = 1$). Donc $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$: les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires. »

- Vérifie d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **non colinéaires**.
- Écris les **trois équations**, résous-en deux, **vérifie la troisième**.
- Conclue par une phrase : « coplanaires » ou « non coplanaires ».

Les pièges classiques

- Oublier de **vérifier la troisième équation** : sans elle, tu n'as pas prouvé la coplanarité.
- Se tromper de sens dans $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; \dots)$: c'est **arrivée moins départ**.
- Conclure « non coplanaires » alors que le système n'est pas écrit.
- Utiliser le théorème de coplanarité avec deux vecteurs colinéaires.

Un signe moins oublié dans une coordonnée fait basculer un point à l'autre bout de l'espace. Relis tes soustractions.

Exercice 1 (★) : coordonnées, milieu, parallélogramme

Dans un repère de l'espace, on donne :

$$A(1; 2; -1), B(3; -1; 2), C(0; 4; 1), D(2; 1; 3).$$

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et du milieu J de $[CD]$.
3. Calculer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer le point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme.
5. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC .

Correction de l'exercice 1

Question 1

Les coordonnées d'un vecteur sont « arrivée moins départ » :

$$\overrightarrow{AB}(3 - 1; -1 - 2; 2 - (-1))$$

$$\overrightarrow{AB}(2; -3; 3)$$

$$\overrightarrow{AC}(0 - 1; 4 - 2; 1 - (-1))$$

$$\overrightarrow{AC}(-1; 2; 2)$$

$$\overrightarrow{AD}(2 - 1; 1 - 2; 3 - (-1))$$

$$\overrightarrow{AD}(1; -1; 4)$$

$$\overrightarrow{BC}(0 - 3; 4 - (-1); 1 - 2)$$

$$\overrightarrow{BC}(-3; 5; -1)$$

Question 2

$$I\left(\frac{1+3}{2}; \frac{2+(-1)}{2}; \frac{-1+2}{2}\right)$$

$$I\left(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$J\left(\frac{0+2}{2}; \frac{4+1}{2}; \frac{1+3}{2}\right)$$

$$J\left(1; \frac{5}{2}; 2\right)$$

Question 3

$$2\overrightarrow{AB} = (4; -6; 6) \text{ et } 3\overrightarrow{AC} = (-3; 6; 6).$$

$$2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = (4 + 3; -6 - 6; 6 - 6)$$

$$2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}(7; -12; 0)$$

Question 4

$ABCE$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$. Notons $E(x; y; z)$. $\overrightarrow{EC}(0 - x; 4 - y; 1 - z)$. L'égalité avec $\overrightarrow{AB}(2; -3; 3)$ donne :

$$-x = 2, 4 - y = -3, 1 - z = 3$$

Donc $x = -2, y = 7, z = -2$.

$$E(-2; 7; -2)$$

Question 5

Le centre de gravité a pour coordonnées la moyenne de celles des sommets :

$$G\left(\frac{1+3+0}{3}; \frac{2-1+4}{3}; \frac{-1+2+1}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Exercice 2 (★★) : alignement, avec un paramètre

1. Les points $A(1; 2; 3)$, $B(3; 5; 9)$, $C(-1; -1; -3)$ sont-ils alignés ?
2. Les points $A(1; 2; 3)$, $B(3; 5; 9)$, $D(2; 3; 5)$ sont-ils alignés ?
3. Déterminer le réel m tel que les points $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(m; 3; -4)$ soient alignés.

Correction de l'exercice 2

Méthode

A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Question 1

$$\overrightarrow{AB}(2; 3; 6) \text{ et } \overrightarrow{AC}(-2; -3; -6). \text{ On observe } \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.$$

Les vecteurs sont colinéaires : A, B, C sont alignés.

Question 2

$$\overrightarrow{AB}(2; 3; 6) \text{ et } \overrightarrow{AD}(1; 1; 2).$$

S'il existait k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD}$, on aurait $2 = k \times 1, 3 = k \times 1$: deux valeurs différentes de k . C'est impossible.

Les vecteurs ne sont pas colinéaires : A, B, D ne sont pas alignés.

Question 3

$\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(m-1; 3; -6)$. Les vecteurs sont colinéaires s'il existe k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$:

$$m-1 = k, 3 = k, -6 = -2k$$

La deuxième équation donne $k = 3$. La troisième est vérifiée ($-2 \times 3 = -6$). La première donne $m-1 = 3$.

$$m = 4$$

Vérification : pour $m = 4$, $\overrightarrow{AC}(3; 3; -6) = 3\overrightarrow{AB}$

Exercice 3 (★★) : coplanarité de vecteurs

1. Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 0)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$, $\vec{w}(2; 5; 1)$ sont-ils coplanaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 1)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$, $\vec{w}(1; 1; 1)$ sont-ils coplanaires ?
3. Déterminer le réel m tel que $\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(2; -1; 0)$, $\vec{w}(4; 3; m)$ soient coplanaires.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles). On cherche a , b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$2 = a, 5 = 2a + b, 1 = b$$

La première donne $a = 2$, la troisième $b = 1$. La deuxième est vérifiée : $2 \times 2 + 1 = 5$.

$\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$: les trois vecteurs sont coplanaires.

Question 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Supposons $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$1 = a, 1 = b, 1 = a + b$$

Les deux premières équations donnent $a = b = 1$, donc $a + b = 2 \neq 1$: la troisième est fausse. Le système n'a pas de solution.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Question 3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. On cherche a , b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$4 = a + 2b, 3 = 2a - b, m = 3a$$

Les deux premières équations : $a = 4 - 2b$, puis $3 = 2(4 - 2b) - b = 8 - 5b$, donc $b = 1$ et $a = 2$.

La troisième donne $m = 3 \times 2 = 6$.

$$m = 6$$

$$\text{Vérification : } 2\vec{u} + \vec{v} = (2 + 2; 4 - 1; 6 + 0) = (4; 3; 6)$$

Exercice 4 (★★) : coplanarité de quatre points

On donne $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(1; 1; -1)$, $E(1; 1; 1)$.

1. Montrer que A , B , C ne sont pas alignés.
2. Les points A , B , C , D sont-ils coplanaires ?
3. Les points A , B , C , E sont-ils coplanaires ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

$\overrightarrow{AB}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles (la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{AC}$ est nulle mais pas celle de $\overrightarrow{AB}$).

A , B , C ne sont pas alignés : ils définissent le plan (ABC) .

Question 2

D est dans le plan (ABC) si et seulement s'il existe a , b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. On a $\overrightarrow{AD}(0; 1; -1)$.

$$0 = -a - b, 1 = a, -1 = b$$

La deuxième et la troisième donnent $a = 1$ et $b = -1$. La première est vérifiée : $-1 - (-1) = 0$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$: les points A , B , C , D sont coplanaires.

Question 3

On a $\overrightarrow{AE}(0; 1; 1)$. Supposons $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$:

$$0 = -a - b, 1 = a, 1 = b$$

La deuxième et la troisième donnent $a = b = 1$. La première donne $-a - b = -2 \neq 0$: elle n'est pas vérifiée. Le système n'a pas de solution.

Les points A , B , C , E ne sont pas coplanaires.

Exercice 5 (★★) : décomposer dans une base

On donne $\vec{u}(1;1;0)$, $\vec{v}(0;1;1)$, $\vec{w}(1;0;1)$ et $\vec{t}(3;4;3)$.

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{t}$ dans cette base.

Correction de l'exercice 5

Question 1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Supposons $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$1 = a, 0 = a + b, 1 = b$$

La première et la troisième donnent $a = b = 1$. La deuxième donne $a + b = 2 \neq 0$: contradiction.

Donc $\vec{w}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

Question 2

On cherche $(a; b; c)$ tel que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$:

$$3 = a + c, 4 = a + b, 3 = b + c$$

En additionnant : $10 = 2(a + b + c)$, donc $a + b + c = 5$.

On en déduit $b = 5 - 3 = 2$, $c = 5 - 4 = 1$, $a = 5 - 3 = 2$.

$$\text{Vérification : } 2\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = (2 + 0 + 1; 2 + 2 + 0; 0 + 2 + 1) = (3; 4; 3)$$

$\vec{t} = 2\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$, de coordonnées $(2; 2; 1)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 6 (★★) : un parallélépipède en coordonnées

On donne $A(0;0;0)$, $B(2;1;0)$, $D(0;3;1)$, $E(1;0;4)$.

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède (avec les arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[AE]$ issues de A).

1. Déterminer les coordonnées de C , F , H , G .
2. Calculer les coordonnées du milieu de $[AG]$ et de celui de $[BH]$. Que constate-t-on ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

Dans un parallélépipède, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$.

$$C = B + \overrightarrow{AD} = (2 + 0; 1 + 3; 0 + 1)$$

$$C(2; 4; 1)$$

$$F = B + \overrightarrow{AE} = (2 + 1; 1 + 0; 0 + 4)$$

$$F(3; 1; 4)$$

$$H = D + \overrightarrow{AE} = (0 + 1; 3 + 0; 1 + 4)$$

$$H(1; 3; 5)$$

$$G = C + \overrightarrow{AE} = (2 + 1; 4 + 0; 1 + 4)$$

$$G(3; 4; 5)$$

Question 2

$$\text{Milieu de } [AG] : \left(\frac{0+3}{2}; \frac{0+4}{2}; \frac{0+5}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2} \right).$$

$$\text{Milieu de } [BH] : \left(\frac{2+1}{2}; \frac{1+3}{2}; \frac{0+5}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2} \right).$$

Les deux segments ont le même milieu : les diagonales $[AG]$ et $[BH]$ se coupent en leur milieu $\left(\frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2} \right)$.

Exercice 7 (★★★) : le centre de gravité d'un tétraèdre

On reprend $A(1; 2; -1)$, $B(3; -1; 2)$, $C(0; 4; 1)$, $D(2; 1; 3)$.

On note G l'isobarycentre de A , B , C , D : ses coordonnées sont la moyenne de celles des quatre points.

1. Calculer les coordonnées de G .

2. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Montrer que G est le milieu de $[IJ]$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

$$G \left(\frac{1+3+0+2}{4}; \frac{2-1+4+1}{4}; \frac{-1+2+1+3}{4} \right) = \left(\frac{6}{4}; \frac{6}{4}; \frac{5}{4} \right)$$

$$G \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{4} \right)$$

Question 2

D'après l'exercice 1, $I\left(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $J\left(1; \frac{5}{2}; 2\right)$. Le milieu de $[IJ]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{2+1}{2}; \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{2}; \frac{\frac{1}{2} + 2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)$$

Ce sont les coordonnées de G : G est le milieu de $[IJ]$.

Remarque : c'est vrai pour tout tétraèdre. Le centre de gravité est le milieu du segment joignant les milieux de deux arêtes opposées.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(2; 4; 7)$ sont colinéaires.
2. Les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 0)$, $\vec{v}(0; 1; 0)$, $\vec{w}(0; 0; 1)$ forment une base de l'espace.
3. Les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 2)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$, $\vec{w}(1; 1; 3)$ sont coplanaires.
4. Les points $O(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 4; 6)$ sont alignés.
5. Le vecteur nul est coplanaire avec deux vecteurs quelconques.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

Les coordonnées seraient proportionnelles avec un même rapport $k = 2 : 2 = 2 \times 1$, $4 = 2 \times 2$, mais $7 \neq 2 \times 3 = 6$.

Faux.

Affirmation 2

Ce sont les vecteurs de base d'un repère : ils ne sont pas coplanaires (aucun n'est combinaison linéaire des deux autres, car les coordonnées de $\vec{w}$ ne peuvent pas être $a\vec{u} + b\vec{v} = (a; b; 0)$).

Vrai.

Affirmation 3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. On remarque $\vec{u} + \vec{v} = (1; 1; 3) = \vec{w}$.

Vrai. Les trois vecteurs sont coplanaires.

Affirmation 4

$\overrightarrow{OC}(2; 4; 6) = 2\overrightarrow{OB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires.

Vrai.

Affirmation 5

$\vec{0} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$, donc $\vec{0}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Vrai.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **coordonnées de vecteurs**, de **milieux** et un **parallélogramme** (exercices 1 et 6).
- Un **alignement** de points, souvent avec un paramètre (exercice 2).
- Une **coplanarité** de vecteurs ou de points, avec vérification de la troisième équation (exercices 3 et 4).
- La **décomposition d'un vecteur** dans une base (exercice 5).
- Un **centre de gravité** (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Pour $A(1;2;3)$ et $B(3;-1;0)$, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?

- A. $(2; -3; -3)$ (bonne réponse)
- B. $(4; 1; 3)$
- C. $(-2; 3; 3)$
- D. $(2; 3; 3)$

Justification : On soustrait : $x_B - x_A$, $y_B - y_A$, $z_B - z_A$.

2. Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$ pour $A(1;2;3)$ et $B(3;-1;0)$?

- A. $(2; -3; -3)$
- B. $\left(1; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$
- C. $(4; 1; 3)$
- D. $\left(2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ (bonne réponse)

Justification : On fait la moyenne des coordonnées : $\frac{1+3}{2}$, $\frac{2-1}{2}$, $\frac{3+0}{2}$.

3. Pour $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$ et $C(0;1;0)$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont :

- A. **non colinéaires** (bonne réponse)
- B. colinéaires
- C. égaux
- D. nuls

Justification : $\overrightarrow{AB}(1;0;0)$ et $\overrightarrow{AC}(0;1;0)$ ne sont pas proportionnels.

4. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si :

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
- B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
- C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (**bonne réponse**)

Justification : Les côtés opposés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles, de même longueur et de même sens.

5. Pour $A(0;0;0)$, $B(2;1;0)$ et $C(3;3;1)$, quel point D rend $ABCD$ parallélogramme ?

- A. $D(-1;-2;-1)$
- B. $D(1;2;0)$
- C. $D(1;2;1)$ (**bonne réponse**)
- D. $D(5;4;1)$

Justification : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donne $D = A + C - B = (1;2;1)$.

6. Dans l'exercice 1, avec $A(1;2;-1)$ et $B(3;-1;2)$, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?

- A. $(-2;3;-3)$
- B. $(2;3;3)$
- C. $(2;-3;3)$ (**bonne réponse**)
- D. $(4;1;1)$

Justification : On soustrait les coordonnées de A à celles de B : $(3-1;-1-2;2-(-1))$.

7. Dans l'exercice 2, quelle valeur de m rend alignés $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(m;3;-4)$?

- A. $m = 3$
- B. $m = 6$
- C. $m = 2$
- D. $m = 4$ (**bonne réponse**)

Justification : $\overrightarrow{AB}(1;1;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(m-1;3;-6)$ doivent être colinéaires : $\frac{m-1}{1} = \frac{3}{1} = \frac{-6}{-2} = 3$, donc $m = 4$.

8. Dans l'exercice 3, les vecteurs $\vec{u}(1;2;0)$, $\vec{v}(0;1;1)$, $\vec{w}(2;5;1)$ sont-ils coplanaires ?

- A. Non
- B. On ne peut pas savoir sans calcul supplémentaire
- C. Seulement si l'origine est incluse
- D. **Oui, car $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$** (**bonne réponse**)

Justification : $2\vec{u} + \vec{v} = (2;4;0) + (0;1;1) = (2;5;1) = \vec{w}$: $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

9. Dans l'exercice 6 (parallélépipède avec $A(0;0;0)$, $B(2;1;0)$, $D(0;3;1)$, $E(1;0;4)$), quelles sont les coordonnées de C ?

A. $(2;4;1)$ (**bonne réponse**)

B. $(2;3;1)$

C. $(0;3;1)$

D. $(2;1;1)$

Justification : $C = B + \overrightarrow{AD} = B + (0;3;1) = (2;4;1)$, car $ABCD$ est un parallélogramme.

10. Dans l'exercice 7, quelles sont les coordonnées de l'isobarycentre G de $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;4;1)$, $D(2;1;3)$?

A. $(2;2;2)$

B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)$ (**bonne réponse**)

C. $(6;6;5)$

D. $(1,5;1,5;1,5)$

Justification : On fait la moyenne des quatre coordonnées : $\frac{1+3+0+2}{4} = \frac{3}{2}$, et de même pour y et z .