

Fiche 1 : vecteurs de l'espace, colinéarité et coplanarité

Huit exercices pour maîtriser les vecteurs de l'espace **sans coordonnées** :

- relation de Chasles et règle du parallélogramme ;
- décomposition d'un vecteur dans une base ;
- alignement de points ;
- coplanarité de vecteurs et parallélisme d'une droite et d'un plan ;
- parallélogramme dans l'espace ;
- base d'un tétraèdre ;
- diagonales d'un parallélogramme ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- chaque égalité vectorielle est justifiée (Chasles, milieu, parallélogramme) ;
- la relation de colinéarité ou de coplanarité est écrite ;
- la conclusion nomme la propriété utilisée.

Le modèle de rédaction d'un alignement

« On a $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Comme I est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires, donc les points A, J, I sont alignés. »

- Écris **chaque vecteur** comme combinaison des vecteurs de base.
- Fais apparaître la **relation** $\overrightarrow{AJ} = k \overrightarrow{AI}$.
- **Conclus** avec la propriété : « colinéaires, donc alignés ».

Les pièges classiques

- Se fier à la figure au lieu de justifier par une relation vectorielle.
- Écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors que c'est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (l'ordre des lettres compte).
- Appliquer le théorème de coplanarité avec deux vecteurs **colinéaires**.
- Oublier de dire pourquoi une droite est **strictement** parallèle (et non incluse).

En géométrie dans l'espace, la figure ressemble toujours à une cage d'escalier. Fie-toi aux vecteurs, pas à tes yeux.

Dans tous les exercices sur le cube : $ABCDEFGH$ est un cube, $ABCD$ est la face inférieure, $EFGH$ la face supérieure, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes.

Exercice 1 (★) : Chasles et règle du parallélépipède

Dans le cube $ABCDEFGH$, écrire chaque vecteur sous la forme d'un seul vecteur :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

2. $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}$

3. $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC}$

4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

5. $\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{EA}$

6. $\overrightarrow{FH} - \overrightarrow{BD}$

Exercice 2 (★★) : décomposer dans une base

Dans le cube $ABCDEFGH$, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

On note I le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[GH]$.

Exprimer $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Exercice 3 (★★) : alignement de points

$ABCD$ est un tétraèdre. On note I le milieu de $[BC]$. Le point J est défini par :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

1. Montrer que les points A , J , I sont alignés.

2. Le point E est défini par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que A , I , E sont alignés et que I est le milieu de $[AE]$.

Exercice 4 (★★) : coplanarité et droite parallèle à un plan

Dans le cube $ABCDEFGH$:

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires.

2. Montrer que la droite (BD) est parallèle au plan (AFH) .

3. Montrer que B n'appartient pas au plan (AFH) . Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 (★★) : un parallélogramme dans l'espace

$ABCD$ est un tétraèdre. On note I, J, K, L les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD], [DA]$.

Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme. Que peut-on en déduire pour les points I, J, K, L ?

Exercice 6 (★★) : décomposer dans la base d'un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre. On note I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AD]$.

1. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.
2. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ dans cette base.
3. Le point K est défini par $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Montrer que K est le symétrique de J par rapport à I .

Exercice 7 (★★★) : les diagonales d'un parallélépipède

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède (les faces sont des parallélogrammes). Ses diagonales sont $[AG], [BH], [CE]$ et $[DF]$.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AD}, \vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
2. On note M le milieu de $[AG]$ et N celui de $[BH]$. Montrer que $M = N$.
3. Que peut-on en déduire pour les quatre diagonales ?

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Trois vecteurs coplanaires sont toujours colinéaires deux à deux.
2. Si $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$, alors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.
3. Dans un tétraèdre $ABCD$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
4. Deux droites qui n'ont aucun point commun sont parallèles.
5. Quatre points de l'espace sont toujours coplanaires.
6. Si $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$, alors les points A, B, C sont alignés.

Ce qui peut tomber au bac

- Une **décomposition de vecteur** avec Chasles dans un cube ou un tétraèdre (exercices 1, 2, 6).
- Un **alignement** de points par une relation vectorielle (exercices 3 et 7).
- Une **coplanarité** et un **parallélisme** droite-plan (exercice 4).
- Un **parallélogramme dans l'espace** (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

- Les vecteurs $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{v}(2;4;6)$ sont :
 - non colinéaires
 - orthogonaux
 - de même norme
 - colinéaires
- Les vecteurs $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{v}(2;4;7)$ sont :
 - non colinéaires
 - égaux
 - nuls
 - colinéaires
- Trois points A, B, C non alignés et un point D sont coplanaires si :
 - $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ pour deux réels x et y
 - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
 - $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$
 - $ABCD$ est un carré
- Si I est le milieu de $[AB]$, alors :
 - $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$
 - $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 - $\overrightarrow{AI}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$
 - $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$
- Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, sont coplanaires si :
 - $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
 - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même norme
 - $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$
 - leur produit est nul

6. Dans l'exercice 1, à quel vecteur est égal $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$ dans le cube $ABCDEFGH$?
- A. $\overrightarrow{AC}$
 - B. $\vec{0}$
 - C. $\overrightarrow{BG}$
 - D. $\overrightarrow{AG}$
7. Dans l'exercice 3, comment est défini le point J tel que A, J, I soient alignés (avec I milieu de $[BC]$) ?
- A. $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
 - B. $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
 - C. $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
 - D. $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI}$
8. Dans l'exercice 4, la droite (BD) et le plan (AFH) sont :
- A. confondus
 - B. sécants en un point
 - C. strictement parallèles (aucun point commun)
 - D. perpendiculaires
9. Dans l'exercice 5, avec I, J, K, L les milieux des côtés d'un tétraèdre $ABCD$, quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?
- A. un trapèze quelconque
 - B. un triangle
 - C. un parallélogramme
 - D. un carré
10. Dans l'exercice 7, dans un parallélépipède $ABCDEFGH$, où se coupent les quatre diagonales $[AG]$, $[BH]$, $[CE]$, $[DF]$?
- A. seulement deux d'entre elles se coupent
 - B. elles ne se coupent pas toutes au même point
 - C. toutes en leur milieu, le centre du parallélépipède
 - D. sur la face $ABCD$