

Contrôle : chapitre 10, Vecteurs, droites et plans de l'espace

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Un cube et ses points remarquables

Soit $ABCDEFGH$ un cube. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[EH]$ et K le point défini par $\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$.

1. Montrer, à l'aide de la relation de Chasles, que $\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$. (1,5 points)
2. Montrer que les points I , J et K sont alignés. (1 point)
3. Montrer que les points A , I , J et G sont coplanaires. (1,5 points)
4. Les points A , I , J et F sont-ils coplanaires ? Justifier. (2 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1,5 points)

On insère les points B , A et E : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ}$.

I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, car $ABCD$ est un carré donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

J est le milieu de $[EH]$ donc $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, car $ADHE$ est un carré donc $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$.

Ainsi $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.

Barème : 0,5 point pour le choix des points intermédiaires dans Chasles ; 0,5 point pour les égalités $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{EJ}$ (milieux, côtés du cube) ; 0,5 point pour le calcul et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1 point)

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \text{ donc } \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}, \text{ donc } \overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires : les points I, J, K sont alignés.

Barème : 0,5 point pour le calcul de $\overrightarrow{IK}$; 0,5 point pour la relation $\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{IJ}$ et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1,5 points)

Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: $\overrightarrow{AI} \left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{AJ} \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(1; 1; 1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires (la première coordonnée de $\overrightarrow{AJ}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{AI}$, et la troisième de $\overrightarrow{AI}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{AJ}$).

De plus $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} (1; 1; 1)$, d'où $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$.

$\overrightarrow{AG}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$: les points A, I, J, G sont coplanaires.

Barème : 0,5 point pour les coordonnées des trois vecteurs ; 0,5 point pour la non-colinéarité de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ (hypothèse du théorème) ; 0,5 point pour la relation $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$ et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (2 points)

$\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(1; 0; 1)$.

Les points sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AI} + b\overrightarrow{AJ}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1 = a \\ 0 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \\ 1 = b \end{cases}$$

La première et la troisième équations donnent $a = 1$ et $b = 1$, ce qui contredit la deuxième : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \neq 0$. Le système n'a pas de solution.

Les points A, I, J, F ne sont pas coplanaires.

Barème : 0,5 point pour la traduction de la coplanarité par un système ; 1 point pour la résolution et la contradiction ; 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 2 (8 points) : Droites et plan dans un repère

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2; -1; 1)$, $B(4; 1; -1)$ et $C(1; 2; 3)$, ainsi que les droites :

d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 1 - s \\ z = -1 + s \end{cases} (s \in \mathbb{R})$ et d'' de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 2 - u \\ z = u \end{cases} (u \in \mathbb{R}).$$

1. Montrer que les points A , B , C ne sont pas alignés. (1 point)
2. Donner une représentation paramétrique de la droite $d = (AB)$. (1 point)
3. Montrer que les droites d et d' sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. (2 points)
4. Les droites d et d'' sont-elles coplanaires ? Justifier. (1,5 points)
5. Soit Δ la droite passant par $E(0; 0; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(-1; 7; 3)$. Montrer que Δ est strictement parallèle au plan (ABC) . (2,5 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1 point)

$\overrightarrow{AB}(2; 2; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 3; 2)$.

Si ces vecteurs étaient colinéaires, leurs coordonnées seraient proportionnelles ; or $\frac{2}{-1} = -2$ et $\frac{2}{3} \neq -2$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : A , B , C ne sont pas alignés.

Barème : 0,5 point pour les coordonnées des deux vecteurs ; 0,5 point pour la non-proportionnalité et la conclusion.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1 point)

$\overrightarrow{AB}(2; 2; -2)$ est colinéaire à $\vec{u}(1; 1; -1)$, qui dirige donc d . La droite d passe par $A(2; -1; 1)$.

$$d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Barème : 0,5 point pour un vecteur directeur ; 0,5 point pour la représentation paramétrique.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2 points)

Un vecteur directeur de d' est $\vec{v}(2; -1; 1)$. Les vecteurs $\vec{u}(1; 1; -1)$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (car $\frac{2}{1} = 2$ et $\frac{1}{-1} = -1$), donc d et d' ne sont pas parallèles.

Un point commun correspond à $(t; s)$ solution de :

$$\begin{cases} 2 + t = 1 + 2s \\ -1 + t = 1 - s \\ 1 - t = -1 + s \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $t = 2s - 1$ puis $-1 + 2s - 1 = 1 - s$, soit $s = 1$ et $t = 1$. La troisième est vérifiée : $1 - 1 = 0 = -1 + 1$.

Le système a une solution unique : les droites sont sécantes au point $(3; 0; 0)$.

Barème : 0,5 point pour la non-colinéarité des vecteurs directeurs ; 1 point pour la résolution du système et la vérification de la troisième équation ; 0,5 point pour le point d'intersection.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1,5 points)

Un vecteur directeur de d'' est $\vec{w}(1; -1; 1)$, non colinéaire à $\vec{u}(1; 1; -1)$: les droites ne sont pas parallèles.

Un point commun correspondrait à $(t; u)$ vérifiant $\begin{cases} 2 + t = 1 + u \\ -1 + t = 2 - u \\ 1 - t = u \end{cases}$. Les deux premières équations donnent, par addition membre à membre, $1 + 2t = 3$, soit $t = 1$, puis $u = 2$; la troisième donne $u = 0$, ce qui est contradictoire.

Les droites d et d'' ne sont ni parallèles ni sécantes : elles ne sont **pas coplanaires**.

Barème : 0,5 point pour la non-colinéarité des vecteurs directeurs ; 0,5 point pour le système et la contradiction ; 0,5 point pour la conclusion (non coplanaires).

Correction de l'exercice 2, question 5

Question 5 (2,5 points)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (question 1) : ils forment une base du plan (ABC) .

On remarque que $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = (1 - 2; 1 + 6; -1 + 4) = (-1; 7; 3)$, donc $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$: $\vec{n}$ est coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. La droite Δ est donc parallèle au plan (ABC) ou incluse dans ce plan.

Il reste à savoir si E appartient au plan (ABC) . On a $\overrightarrow{AE}(-2; 1; 4)$; $E \in (ABC)$ si et seulement s'il existe a, b tels que $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, soit :

$$\begin{cases} 2a - b = -2 \\ 2a + 3b = 1 \\ -2a + 2b = 4 \end{cases}$$

En soustrayant les deux premières équations, $-4b = -3$ donc $b = \frac{3}{4}$, puis $a = \frac{b - 2}{2} = -\frac{5}{8}$.

La troisième équation donne alors $-2a + 2b = \frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \frac{11}{4} \neq 4$: le système n'a pas de solution, donc $E \notin (ABC)$.

Δ est parallèle au plan (ABC) et n'y est pas incluse : elle est **strictement parallèle** à (ABC) .

Barème : 1 point pour la décomposition $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et la conclusion « parallèle ou incluse » ; 1 point pour le système pour $E \in (ABC)$ et sa résolution ; 0,5 point pour la conclusion : strictement parallèle.

Exercice 3 (6 points) : Deux drones

L'espace est muni d'un repère orthonormé dont l'unité vaut 10 mètres. À l'instant $t = 0$ (en secondes), deux drones sont aux points $A_1(1; 3; 2)$ et $A_2(2; 7; 1)$. Chacun se déplace en ligne droite à vitesse constante : le vecteur déplacement du drone 1 pendant une seconde est $\vec{u}_1(2; -1; 1)$ et celui du drone 2 est $\vec{u}_2(1; -2; 1)$. À l'instant $t \geq 0$, les positions des drones sont donc les points $M_1(t)$ et $M_2(t)$ tels que $\overrightarrow{A_1 M_1(t)} = t \vec{u}_1$ et $\overrightarrow{A_2 M_2(t)} = t \vec{u}_2$.

```
def pos(A, u, t):
    return (A[0] + t*u[0], A[1] + t*u[1], .....)
```

```
A1 = (1, 3, 2)
u1 = (2, -1, 1)
A2 = (2, 7, 1)
u2 = (1, -2, 1)
```

```
for k in range(0, 11):
    t = k
    if pos(A1, u1, t) == pos(A2, u2, t):
        print("collision à l'instant", t)
```

1. Donner les coordonnées de $M_1(t)$ et de $M_2(t)$ en fonction de t . (1 point)
2. Montrer que les trajectoires des deux drones (les droites d_1 et d_2 qui les portent) sont sécantes en un point X dont on précisera les coordonnées. (2 points)
3. Les deux drones se percutent-ils ? Justifier. (1,5 points)
4. On considère le script Python ci-dessous. Compléter la ligne incomplète, puis indiquer, en justifiant, ce que le script affiche. (1,5 points)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1 point)

$M_1(t)$ a pour coordonnées $(1 + 2t; 3 - t; 2 + t)$ et $M_2(t)$ a pour coordonnées $(2 + t; 7 - 2t; 1 + t)$.

Barème : 0,5 point pour les coordonnées de $M_1(t)$; 0,5 point pour les coordonnées de $M_2(t)$.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (2 points)

Les vecteurs $\vec{u}_1(2; -1; 1)$ et $\vec{u}_2(1; -2; 1)$ ne sont pas colinéaires ($\frac{2}{1} = 2$ et $\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$) : les trajectoires ne sont pas parallèles.

Un point commun correspond à $(t; s)$ tel que
$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 + s \\ 3 - t = 7 - 2s \\ 2 + t = 1 + s \end{cases}$$

La première et la troisième équations donnent $s = 2t - 1$ et $s = t + 1$, donc $t = 2$ et $s = 3$.

La deuxième est vérifiée : $3 - 2 = 1 = 7 - 6$.

Les trajectoires sont sécantes au point $X(5; 1; 4)$.

Barème : 0,5 point pour les trajectoires ne sont pas parallèles ; 1 point pour la résolution du système et la vérification de la deuxième équation ; 0,5 point pour les coordonnées de X .

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

Les trajectoires se coupent en X , mais le drone 1 y passe à l'instant $t = 2$ et le drone 2 à l'instant $s = 3$: ce ne sont pas les mêmes instants.

Pour une collision, il faudrait un instant t tel que $M_1(t) = M_2(t)$. Or les cotes valent $2 + t$ et $1 + t$, qui diffèrent de 1 (soit 10 m) à chaque instant : l'égalité $2 + t = 1 + t$ est impossible.

Les drones **ne se percutent jamais** : les trajectoires se croisent, mais pas au même instant.

Barème : 0,5 point pour les instants de passage en X ; 0,5 point pour la condition $M_1(t) = M_2(t)$ pour un même t ; 0,5 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1,5 points)

```
def pos(A, u, t):
    return (A[0] + t*u[0], A[1] + t*u[1], A[2] + t*u[2])
```

Le script teste, pour $t = 0, 1, \dots, 10$, si les deux drones ont la même position. Il n'affiche **rien** : d'après la question 3, les positions ne coïncident jamais (leurs cotes diffèrent de 1 à chaque instant), donc la condition du `if` n'est jamais vraie.

Barème : 0,5 point pour la coordonnée manquante $A[2] + t*u[2]$; 0,5 point pour l'absence d'affichage ; 0,5 point pour la justification.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	8
Exercice 3	6
Total	20