

Suites : le cours

Ce chapitre revient presque chaque année au bac :

- un raisonnement par récurrence ;
- une suite définie par une relation de récurrence ;
- une limite à déterminer ;
- et souvent une petite question de programmation.

Voici l'essentiel, dans l'ordre où tu en as besoin, avec les astuces qui font gagner des points et les pièges qui en font perdre.

Dans tout le cours, les limites sont prises quand $n \rightarrow +\infty$.

Comment utiliser ce cours

- Lis une section, puis fais tout de suite les exercices correspondants dans les fiches (indiquées à la fin de chaque partie).
- Les encadrés sont des astuces, les encadrés sont des pièges classiques. Note ceux qui te piègent.
- Si une méthode te semble abstraite, elle sera plus claire après la fiche qui l'utilise.

0. Les rappels indispensables

Une suite peut être définie de façon **explicite** ($u_n = f(n)$, on calcule u_n directement) ou **par récurrence** ($u_{n+1} = f(u_n)$, on calcule terme après terme).

Suite arithmétique de raison r :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{et} \quad u_n = u_0 + nr$$

Suite géométrique de raison q :

$$u_{n+1} = q u_n \quad \text{et} \quad u_n = u_0 \times q^n$$

Somme arithmétique : (nombre de termes) $\times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

Par exemple :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme géométrique : pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Sens de variation. Une suite est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n , décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$.

Quatre méthodes :

1. **Le signe de $u_{n+1} - u_n$** : la méthode qui marche presque toujours (pense à factoriser).
2. **Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$** comparé à 1, seulement si tous les termes sont strictement positifs.

3. **Une fonction croissante** : si $u_n = f(n)$ avec f croissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est croissante.
4. **Une récurrence** : on démontre que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n .

Pièges

- Une suite n'est pas obligatoirement croissante ou décroissante : $((-1)^n)$ n'est ni l'une ni l'autre.
- Dans une somme de $k = 0$ à n , il y a $n + 1$ termes, pas n .

Astuce : pour vérifier une formule, teste-la avec $n = 0$ et $n = 1$. Ça prend dix secondes et ça évite des heures de regrets.

1. Le raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n à partir d'un rang n_0 , on procède en trois temps :

1. **Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : on suppose $P(k)$ vraie pour un entier $k \geq n_0$ fixé (c'est l'hypothèse de récurrence), et on démontre que $P(k + 1)$ est vraie.
3. **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 2n + 1$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a $3^0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$. Donc $1 \geq 1$: la propriété est vraie.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $3^k \geq 2k + 1$. Alors $3^{k+1} = 3 \times 3^k \geq 3(2k + 1) = 6k + 3$. Or $6k + 3 \geq 2k + 3 = 2(k + 1) + 1$, car $k \geq 0$. Donc $3^{k+1} \geq 2(k + 1) + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les quatre grands types de récurrence au bac :

- Une **formule explicite** à démontrer ($u_n = 2^{n+2} - 3$).
- Un **encadrement** ($0 \leq u_n \leq 3$).
- Une **monotonie** ($u_n \leq u_{n+1}$).
- Une **inégalité** qui sert à trouver une limite ($3^n \geq 2n + 1$, qui prouve que $3^n \rightarrow +\infty$).

Astuces

- Écris au brouillon ce que tu veux obtenir au rang $k + 1$, puis « fabrique-le » depuis l'hypothèse.
- Avec une suite définie par récurrence, remplace u_k par son expression dans $u_{k+1} = f(u_k)$.
- Si f est **croissante**, appliquer f à un encadrement le conserve. Si f est **décroissante**, l'encadrement se retourne.

Pièges

- Écrire « supposons $P(n)$ vraie pour tout n » : c'est ce qu'on veut démontrer.
- Oublier l'initialisation, ou la faire au mauvais rang.
- Une hérédité qui n'utilise pas l'hypothèse de récurrence.
- Oublier la conclusion (elle vaut un point).

Une récurrence sans initialisation, c'est un jeu de dominos où personne ne pousse le premier.

À faire maintenant : la fiche 1 (récurrence).

2. Limite d'une suite

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Elle converge vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes à partir d'un certain rang.

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** (elle peut tendre vers $\pm\infty$, ou n'avoir aucune limite).

Les limites de référence à connaître par cœur :

- $n \rightarrow +\infty$, $n^2 \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$;
- $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$;
- pour la suite géométrique (q^n) : si $q > 1$, elle tend vers $+\infty$; si $-1 < q < 1$, elle tend vers 0 ; si $q = 1$, elle est constante ; si $q \leq -1$, elle n'a pas de limite.

Les règles sur les opérations :

- Une limite finie ajoutée à $+\infty$ donne $+\infty$; $+\infty + \infty$ donne $+\infty$.
- Un produit de deux limites infinies suit la règle des signes.
- Un nombre divisé par une quantité qui tend vers $\pm\infty$ tend vers 0.
- Un nombre non nul divisé par une quantité qui tend vers 0 donne $\pm\infty$: **regarde le signe** (0^+ ou 0^-).

Pièges

- « $\frac{1}{0} = +\infty$ » sans regarder le signe : si $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, alors $\frac{1}{u_n}$ n'a pas de limite.
- Une suite bornée n'est pas forcément convergente ($(-1)^n$).
- Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante.

Astuce : pour une limite, identifie d'abord le **terme dominant** : la plus grande puissance de n , ou la plus grande base pour les q^n .

3. Calculer une limite

Les opérations sur les limites (somme, produit, quotient) fonctionnent tant que la situation est déterminée.

Quatre formes sont indéterminées : « $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ». Pour les lever :

- **Polynôme ou fraction** : factoriser par le terme de plus haut degré. Pour une fraction rationnelle, on compare les degrés : si le numérateur a le plus petit degré, la limite est 0 ; à degrés égaux, c'est le quotient des coefficients dominants ; sinon, on obtient $\pm\infty$.
- **Racines carrées** : multiplier par la quantité conjuguée, avec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
- **Puissances** : factoriser (ou diviser) par la plus grande base, par exemple $3^n - 2^n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

Exemple.

$$\frac{3n^2 - 5n + 1}{n^2 + 2} = \frac{n^2 \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}}$$

Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1, donc la limite est 3.

Exemple avec une racine.

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(n^2 + n) - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Pièges

- Écrire « $\infty - \infty = 0$ » au lieu de transformer l'expression.
- Écrire $\sqrt{n^2 + n} - n \rightarrow 0$ parce que « $\sqrt{n^2} = n$ ». La vraie limite est $\frac{1}{2}$.
- Oublier de citer la règle utilisée (« par somme », « par produit », « par quotient »).

Un « $\infty - \infty$ » qu'on ne transforme pas, c'est un exercice sans conclusion : le correcteur, lui, voit ce qui manque.

À faire maintenant : la fiche 2 (limites).

4. Théorèmes de comparaison

- Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.
- **Théorème des gendarmes** : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si v_n et w_n ont la même limite ℓ , alors $u_n \rightarrow \ell$.

Astuces

- Pour montrer $+\infty$, cherche une **minoration** par une suite simple $(n, n^2, 2n - 1 \dots)$.
- Pour montrer $-\infty$, cherche une **majoration**.
- Un $\sin n$, un $\cos n$ ou un $(-1)^n$ dans l'expression ? Encadre-le entre -1 et 1 , et applique les gendarmes.

Pièges

- Une majoration ne prouve jamais $+\infty$: $u_n \leq n + 1$ ne dit rien.
- Les gendarmes exigent la **même** limite des deux côtés.
- L'encadrement doit être vrai à partir d'un certain rang : précise-le.

Les gendarmes ne laissent passer que ceux qui sont coincés entre deux suites de même limite.

À faire maintenant : la fiche 3 (comparaison et convergence).

5. Suites monotones

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$ (et toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$).
- Toute suite convergente est bornée.

Attention : ce théorème dit que la suite converge, pas vers quelle valeur. La limite n'est pas forcément le majorant. Si (u_n) est croissante et majorée par M , on sait seulement que sa limite ℓ vérifie $u_0 \leq \ell \leq M$.

Astuce : une suite croissante a une limite supérieure ou égale à son premier terme. Cette remarque sert à éliminer une solution parasite d'une équation $\ell = f(\ell)$.

Piège : « majorée » seule ne suffit pas, il faut aussi la croissance.

6. Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = a u_n + b$

C'est le modèle des évolutions « en pourcentage avec un ajout fixe » (population, placement avec versement). La méthode :

1. Trouver ℓ tel que $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \frac{b}{1-a}$ (pour $a \neq 1$).
2. Poser $v_n = u_n - \ell$: la suite (v_n) est géométrique de raison a , car $v_{n+1} = a u_n + b - \ell = a(u_n - \ell) = a v_n$.
3. En déduire $v_n = v_0 \times a^n$, puis $u_n = \ell + (u_0 - \ell) \times a^n$.
4. Conclure : si $-1 < a < 1$, $u_n \rightarrow \ell$. Si $a > 1$, la suite diverge (sauf si $u_0 = \ell$).

Traduire un énoncé :

- « augmente de 3 % » veut dire « $\times 1,03$ » ;
- « baisse de 10 % » veut dire « $\times 0,9$ » ;
- « puis on ajoute 50 » se traduit par « $+50$ ».

Résultat : $u_{n+1} = 0,9 u_n + 50$.

Pièges

- La raison de (v_n) est a , pas ℓ .
- $v_0 = u_0 - \ell$, pas u_0 .
- Vérifie toujours ta formule finale avec $n = 1$: c'est le meilleur détecteur d'erreurs de signe.

À faire maintenant : la fiche 4 (suites arithmético-géométriques).

7. Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

C'est le grand classique du bac. La méthode tient en quatre étapes :

1. Par récurrence, on montre un encadrement de u_n , puis le sens de variation.
2. On en déduit que la suite converge, grâce au théorème des suites monotones.
3. Si f est continue, la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.
4. On résout cette équation et on garde la solution compatible avec l'encadrement.

Astuces

- **L'escalier.** Trace la courbe $y = f(x)$ et la droite $y = x$. Place u_0 sur l'axe des abscisses, monte jusqu'à la courbe pour lire u_1 , va sur la droite $y = x$ pour le ramener sur l'axe, et recommence. Tu vois tout de suite si la suite monte, descend, et vers quoi elle va. C'est une **conjecture** : il faut ensuite la démontrer.
- Pour la monotonie : le signe de $u_{n+1} - u_n$, souvent après une factorisation ou une quantité conjuguée. Ou bien une récurrence.
- Si la question précédente t'a donné l'encadrement, **sers-t'en** pour la suivante.

Pièges

- Écrire $\ell = f(\ell)$ **avant** d'avoir prouvé la convergence.
- Garder les deux solutions de $\ell = f(\ell)$: une seule est compatible avec l'encadrement.
- Se servir de la croissance de f alors que f est décroissante (les inégalités se retournent).
- Oublier de vérifier que u_n reste dans le domaine de f (positif sous une racine, dénominateur non nul).
- Avec f décroissante, la suite n'est en général pas monotone : le sujet te dit alors d'admettre la convergence.

Poser $\ell = f(\ell)$ sans avoir montré que la suite converge, c'est chercher où atterrit un avion qui n'a jamais décollé.

À faire maintenant : la fiche 5 (suites récurrentes).

8. Algorithmique et Python

Trois scripts reviennent tout le temps : **calculer un terme** (boucle **for**), **trouver un seuil** (boucle **while**) et **calculer une somme**. Ils sont détaillés dans la fiche 6.

Astuces

- Exécute le script à la main sur les deux ou trois premières étapes avec un tableau de valeurs.
- Pour un seuil « $u_n \geq A$ », la boucle tourne tant que $u < A$, et on renvoie le compteur n .

Pièges

- Le seuil renvoie n , pas u_n .
- Lis les symboles au caractère près : $<$ n'est pas $\leq$.

À faire maintenant : la fiche 6 (algorithmique et Python).

9. La check-list du jour J

- **Lis tout l'exercice avant de commencer.** Les questions s'enchaînent : un résultat démontré sert pour les suivantes.
- **Si tu bloques, admets et avance.** Tu as le droit d'utiliser le résultat d'une question que tu n'as pas su faire, en écrivant « on admet que... ». Tu récupères les points des questions suivantes.
- **Justifie chaque limite** en nommant la règle (somme, produit, quotient, comparaison, gendarmes).
- **Vérifie avec $n = 0$ ou $n = 1$** chaque formule que tu établis.
- **Rédige la conclusion** de chaque récurrence et chaque limite, avec une phrase complète.
- **Garde du temps pour Python :** c'est souvent la question la plus courte et la plus « cadeau ».

Et si tu doutes : respire, relis la question, et commence par les données. Un exercice de suites se découpe presque toujours en petits morceaux faisables.

Tu as maintenant tout le cours. Enchaîne avec les six fiches d'exercices, puis avec les exercices type bac.

Complément du programme : trois démonstrations sur les limites

Le programme officiel demande de savoir démontrer les propriétés suivantes. Elles reposent toutes sur la même idée : **à partir d'un certain rang**.

Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit A un réel. Comme (u_n) n'est pas majorée, A n'est pas un majorant : il existe un rang N tel que $u_N > A$.

Comme la suite est croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > A$.

Donc tous les termes dépassent A à partir du rang N : $\lim u_n = +\infty$. $\square$

Théorème de comparaison. Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.

Démonstration. Soit A un réel. Comme $v_n \rightarrow +\infty$, il existe N tel que $v_n > A$ pour tout $n \geq N$.

Pour ces n (et à partir du rang de la comparaison), $u_n \geq v_n > A$. Donc $\lim u_n = +\infty$. $\square$

Théorème des gendarmes. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim v_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. À partir d'un certain rang, u_n et w_n appartiennent à l'intervalle $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$.

Alors $\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$: v_n est dans le même intervalle. Donc $\lim v_n = \ell$. $\square$

La démonstration de $\lim q^n = +\infty$ pour $q > 1$ (inégalité de Bernoulli) est dans la fiche 2.

Complément du programme : approcher e avec un algorithme

On peut approcher e avec la somme $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots$: les termes décroissent très vite.

```
def e_approche(n):
    somme, terme = 1.0, 1.0
    for k in range(1, n + 1):
        terme = terme / k      # terme vaut 1/k!
        somme = somme + terme
    return somme

print(e_approche(10))      # affiche 2.7182818011463845
```

La valeur exacte de e est $2,718281828\dots$: avec seulement 10 termes, on obtient déjà 7 décimales correctes.