

Suites : exercices type bac

Trois exercices complets, écrits dans le style de l'épreuve du bac : plusieurs questions qui s'enchaînent, avec une récurrence, une suite auxiliaire, une convergence, une limite et une question de programmation.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac : chaque théorème est nommé, ses hypothèses sont vérifiées, chaque question se termine par une conclusion.

Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- Ouvre la correction question par question, pas d'un seul coup. Compare ta **rédaction**, pas seulement ton résultat.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Un exercice fait « à peu près » ne sert à rien : mieux vaut en faire un seul, mais bien.

Exercice 1 : une suite récurrente avec racine carrée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . Donner les valeurs exactes.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .
5. On souhaite déterminer le plus petit entier n tel que $2 - u_n < 10^{-3}$. Écrire une fonction Python qui renvoie cet entier, puis donner la valeur renvoyée.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$. En déduire que $0 \leq 2 - u_n \leq \frac{2}{2^n}$, puis retrouver la limite de (u_n) .

Correction de la question 1

$$u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{2}$$

$$u_2 = \sqrt{u_1 + 2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \text{ soit environ } 1,848.$$

$$u_1 = \sqrt{2} \text{ et } u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Correction de la question 2

Soit $P(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ ».

Initialisation. On a $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{2}$. Comme $0 \leq 2 \leq 4$, on a $0 \leq \sqrt{2} \leq 2$. Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 2$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $P(k+1)$ est vraie.

En ajoutant 2 à chaque membre de l'hypothèse de récurrence :

$$2 \leq u_k + 2 \leq u_{k+1} + 2 \leq 4$$

Tous ces nombres sont positifs, donc $u_{k+1} = \sqrt{u_k + 2}$ et $u_{k+2} = \sqrt{u_{k+1} + 2}$ sont bien définis.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$: on peut donc l'appliquer à chaque membre en conservant le sens des inégalités.

On obtient :

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_k + 2} \leq \sqrt{u_{k+1} + 2} \leq \sqrt{4}$$

c'est-à-dire $\sqrt{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2$. Comme $0 \leq \sqrt{2}$, on en déduit $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de la question 3

D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante. Toujours d'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$: la suite (u_n) est majorée par 2.

Une suite croissante et majorée converge, d'après le théorème de convergence monotone.

Donc la suite (u_n) converge.

Correction de la question 4

D'après la question 3, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ . Comme $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n , on a $0 \leq \ell \leq 2$ (passage à la limite dans les inégalités larges).

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ est continue sur $[0; 2]$ (composée de fonctions continues), et ℓ appartient à cet intervalle. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, que $u_n \rightarrow \ell$ et que $u_{n+1} \rightarrow \ell$ également, la continuité de f en ℓ donne $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $\ell = \sqrt{\ell+2}$.

Comme $\ell \geq 0$, on peut élever au carré : $\ell^2 = \ell + 2$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, c'est-à-dire $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$. Donc $\ell = 2$ ou $\ell = -1$. Comme $\ell \geq 0$, la valeur $\ell = -1$ est exclue.

Conclusion : $\ell = 2$.

(Vérification : $\sqrt{2+2} = 2$.)

Correction de la question 5

Le script

```
from math import sqrt

def seuil():
    n = 0
    u = 0
    while 2 - u >= 0.001:
        u = sqrt(u + 2)
        n = n + 1
    return n
```

La boucle s'arrête dès que $2 - u < 10^{-3}$; comme la suite converge vers 2, elle se termine.

La valeur renvoyée

On calcule à la main : $u_5 \approx 1,99759$, donc $2 - u_5 \approx 0,0024 \geq 10^{-3}$; $u_6 \approx 1,99940$, donc $2 - u_6 \approx 0,0006 < 10^{-3}$. La suite étant croissante, $2 - u_n$ est décroissante : le plus petit entier n cherché est 6.

La fonction renvoie 6.

Correction de la question 6

L'inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}$. On multiplie et on divise par la quantité conjuguée ($2 + \sqrt{u_n + 2} > 0$) :

$$2 - u_{n+1} = 2 - \sqrt{u_n + 2} = \frac{4 - (u_n + 2)}{2 + \sqrt{u_n + 2}} = \frac{2 - u_n}{2 + \sqrt{u_n + 2}}$$

Comme $\sqrt{u_n + 2} \geq 0$, on a $2 + \sqrt{u_n + 2} \geq 2$, donc $\frac{1}{2 + \sqrt{u_n + 2}} \leq \frac{1}{2}$. Comme $2 - u_n \geq 0$ (question 2) :

$$2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$$

Majoration par récurrence

Soit $Q(n)$: « $2 - u_n \leq \frac{2}{2^n}$ ».

Initialisation : $2 - u_0 = 2 = \frac{2}{2^0}$, donc $Q(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 - u_k \leq \frac{2}{2^k}$. Alors $2 - u_{k+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_k) \leq \frac{1}{2} \times \frac{2}{2^k} = \frac{2}{2^{k+1}}$, donc $Q(k+1)$ est vraie.

Conclusion : $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $2 - u_n \geq 0$ d'après la question 2 :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2 - u_n \leq \frac{2}{2^n}$.

Limite

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, donc $\frac{2}{2^n} \rightarrow 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim(2 - u_n) = 0$.

Donc $\lim u_n = 2$, ce qui confirme la question 4.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q2** : initialisation vérifiée, hypothèse de récurrence explicitement utilisée, croissance de la racine carrée citée avec son intervalle, conclusion.
- **Q3** : les deux propriétés (croissante, majorée) sont énoncées, le théorème de convergence monotone est nommé.
- **Q4** : $\ell \in [0; 2]$, continuité de f , équation $\ell = f(\ell)$, élimination de $\ell = -1$.
- **Q5** : boucle `while` avec la bonne condition, on renvoie n , la valeur 6 est justifiée.
- **Q6** : conjuguée, encadrement, gendarmes cités.

Exercice 2 : un modèle d'évolution (adhérents d'un club)

Un club de sport compte 500 adhérents à la fin de l'année 2026.

Chaque année, 20 % des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion, et le club accueille 90 nouveaux adhérents.

On note u_n le nombre d'adhérents à la fin de l'année 2026 + n , avec $u_0 = 500$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0,8 u_n + 90$. Calculer u_1 et u_2 .
2. On pose $v_n = u_n - 450$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
4. Étudier le sens de variation de (u_n) , puis déterminer sa limite. Interpréter ce résultat dans le contexte.
5. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n < 460$, puis donner la valeur renvoyée.
6. Le club peut-il un jour compter moins de 450 adhérents ? Justifier.

Correction de la question 1

Si 20 % des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion, il en reste 80 % : $u_n \times (1 - 0,2) = 0,8 u_n$. On ajoute les 90 nouveaux adhérents.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,8 u_n + 90$.

$$u_1 = 0,8 \times 500 + 90 = 490$$

$$u_2 = 0,8 \times 490 + 90 = 482$$

$$u_1 = 490 \text{ et } u_2 = 482$$

Correction de la question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 450 = 0,8 u_n + 90 - 450 = 0,8 u_n - 360 = 0,8(u_n - 450) = 0,8 v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 450 = 50$.

Comment trouver 450 ? On résout $\ell = 0,8\ell + 90$, soit $0,2\ell = 90$, donc $\ell = 450$.

Correction de la question 3

(v_n) est géométrique de raison $0,8$ et de premier terme 50 , donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 50 \times 0,8^n$. Comme $u_n = v_n + 450$:

$$u_n = 450 + 50 \times 0,8^n$$

Vérification : $u_1 = 450 + 50 \times 0,8 = 490$ et $u_2 = 450 + 50 \times 0,64 = 482$

Correction de la question 4

Sens de variation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 50 \times 0,8^{n+1} - 50 \times 0,8^n = 50 \times 0,8^n \times (0,8 - 1) = -10 \times 0,8^n$$

Comme $0,8^n > 0$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

Limite. Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim 0,8^n = 0$. Donc, par produit et par somme :

$$\lim u_n = 450$$

Interprétation. Le nombre d'adhérents diminue chaque année et se stabilise progressivement autour de 450 .

Correction de la question 5

Le script

```
def seuil():
    n = 0
    u = 500
    while u >= 460:
        u = 0.8*u + 90
        n = n + 1
    return n
```

La valeur renvoyée

On cherche le plus petit n tel que $450 + 50 \times 0,8^n < 460$, soit $0,8^n < 0,2$. La suite $(0,8^n)$ est décroissante, et :

$$0,8^7 \approx 0,2097 \geq 0,2$$

$$0,8^8 \approx 0,1678 < 0,2$$

Le plus petit entier cherché est donc 8 .

La fonction renvoie 8.

Correction de la question 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 450 + 50 \times 0,8^n$ et $50 \times 0,8^n > 0$. Donc $u_n > 450$.

Non : le club ne peut jamais compter moins de 450 adhérents ; il s'en rapproche sans jamais l'atteindre.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : traduction du pourcentage ($\times 0,8$) et de l'ajout ($+90$).
- **Q2** : le calcul $v_{n+1} = 0,8 v_n$ est écrit en entier, avec la raison et le premier terme.
- **Q3** : formule d'une suite géométrique, retour à u_n .
- **Q4** : signe de $u_{n+1} - u_n$ justifié ($0,8^n > 0$), limite par « $-1 < 0,8 < 1$ », interprétation en contexte.
- **Q5** : condition du `while`, valeur justifiée.

Exercice 3 : une suite auxiliaire qui dépend de n

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2n - 1$. On pose $v_n = u_n - 3n + 6$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n - 6 + 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
4. Déterminer la limite de (u_n) .
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Exprimer T_n en fonction de n .
6. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq 100$, puis donner la valeur renvoyée.

Correction de la question 1

$$u_1 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 \times 0 - 1 = 0$$

$$u_2 = \frac{1}{3} \times 0 + 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$u_3 = \frac{1}{3} \times 1 + 2 \times 2 - 1 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

$$u_1 = 0, u_2 = 1 \text{ et } u_3 = \frac{10}{3}$$

Correction de la question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3(n+1) + 6 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2n - 1 - 3n - 3 + 6 \\ &= \frac{1}{3}u_n - n + 2 \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 3n + 6) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 6 = 9$.

Astuce : mets le facteur $\frac{1}{3}$ en évidence dans le résultat, et vérifie que ce qui reste dans la parenthèse est exactement v_n .

Correction de la question 3

(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 9, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $v_n = u_n - 3n + 6$, on a $u_n = v_n + 3n - 6$.

$$\text{Donc } u_n = 3n - 6 + 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Vérification :

$$u_1 = 3 - 6 + 3 = 0$$

$$u_2 = 6 - 6 + 1 = 1$$

$$u_3 = 9 - 6 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

Correction de la question 4

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc, par produit, $\lim 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. De plus $\lim(3n - 6) = +\infty$. Par somme :

$$\lim u_n = +\infty$$

Correction de la question 5

On écrit $u_k = 3k - 6 + 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$ pour k allant de 0 à n . La somme contient $n + 1$ termes.

On additionne séparément :

- $3 \times (0 + 1 + \dots + n) = 3 \times \frac{n(n+1)}{2}$, d'après la somme des n premiers entiers ;
- la somme de $n + 1$ termes égaux à -6 vaut $-6(n + 1)$;
- $9 \times \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$, d'après la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3} \neq 1$.

$$T_n = \frac{3n(n+1)}{2} - 6(n+1) + \frac{27}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Vérification pour $n = 1$: $T_1 = u_0 + u_1 = 3$. La formule donne $3 - 12 + \frac{27}{2} \times \frac{8}{9} = 3 - 12 + 12 = 3$

Correction de la question 6

Le script

```
def seuil():
    n = 0
    u = 3
    while u < 100:
        u = u/3 + 2*n - 1
        n = n + 1
    return n
```

Attention à l'ordre : la relation $u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + 2n - 1$ utilise n avant l'incrément. On met donc à jour u avant de faire $n = n + 1$.

La valeur renvoyée

$$u_{35} = 99 + \frac{9}{3^{35}} \approx 99 < 100$$

$$u_{36} = 102 + \frac{9}{3^{36}} \approx 102 \geq 100$$

La fonction renvoie 36.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q2** : le calcul de v_{n+1} est écrit intégralement, avec la factorisation par $\frac{1}{3}$.
- **Q3** : formule d'une suite géométrique, puis retour à u_n .
- **Q4** : les deux limites sont justifiées ($-1 < \frac{1}{3} < 1$, puis somme).
- **Q5** : nombre de termes ($n + 1$), formules de sommes citées, vérification numérique.
- **Q6** : ordre des instructions dans la boucle, valeur justifiée.

Les réflexes à retenir

- Une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ se traite presque toujours dans cet ordre : encadrement par récurrence, monotonie, convergence, limite par $\ell = f(\ell)$.
- Un théorème n'est cité qu'une fois ses **hypothèses vérifiées** (croissante et majorée, f continue, etc.).
- Une suite auxiliaire est presque toujours donnée par l'énoncé : le travail consiste à montrer qu'elle est géométrique, puis à revenir à la suite d'origine.
- Vérifie chaque formule trouvée avec les premiers termes calculés.
- Une somme de $k = 0$ à n contient $n + 1$ termes.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices de suites des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.