

Guide de rédaction : suites

Ce guide complète le Guide de rédaction général.

Il rassemble, pour le chapitre Suites, **les onze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Apprends-les comme des gammes : le jour de l'épreuve, tu n'auras plus qu'à les adapter.

Le principe du chapitre

Avec les suites, un correcteur regarde surtout **quatre choses** :

- les quantificateurs (« pour tout $n \in \mathbb{N}$ », « soit $k \in \mathbb{N}$ fixé ») ;
- l'usage réel de l'hypothèse de récurrence ;
- le **nom du théorème** à chaque conclusion (convergence monotone, comparaison, gendarmes) ;
- la **vérification des hypothèses** avant de passer à la limite.

1. Les onze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : calculer des termes et conjecturer.

« On calcule $u_1 = 5$, $u_2 = 13$, $u_3 = 29$. On conjecture que $u_n = 2^{n+2} - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. »

Une conjecture n'est pas une preuve : écris le mot « conjecture », puis démontre-la par récurrence.

Situation 2 : récurrence pour une formule explicite ($u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$).

« Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+2} - 3$.

Initialisation. Pour $n = 0$, $2^2 - 3 = 1 = u_0$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 2^{k+2} - 3$ (hypothèse de récurrence). Alors $u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+2} - 3) + 3 = 2^{k+3} - 3 = 2^{(k+1)+2} - 3$. La propriété est vraie au rang $k + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc $u_n = 2^{n+2} - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
»

Situation 3 : récurrence pour un encadrement ($u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$).

« Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.

Initialisation. $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 3$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_k \leq 3$. Alors $6 \leq u_k + 6 \leq 9$. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient $\sqrt{6} \leq u_{k+1} \leq 3$. Comme $\sqrt{6} \geq 0$, on a $0 \leq u_{k+1} \leq 3$.

Conclusion. $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. »

Astuce : quand f est croissante sur l'intervalle, tu appliques f à l'encadrement en gardant le sens. Quand f est décroissante, l'encadrement se retourne : dis-le.

Situation 4 : sens de variation.

« Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en multipliant par la quantité conjuguée :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 6} - u_n = \frac{(u_n + 6) - u_n^2}{\sqrt{u_n + 6} + u_n} = \frac{(3 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{u_n + 6} + u_n}$$

Or $0 \leq u_n \leq 3$, donc le numérateur est positif, et le dénominateur est strictement positif. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: **la suite (u_n) est croissante.** »

Variante : par récurrence, « $u_0 \leq u_1$ » puis « si $u_k \leq u_{k+1}$ alors, la racine étant croissante, $u_{k+1} \leq u_{k+2}$ ».

Situation 5 : suite auxiliaire géométrique ($u_0 = 1$, $u_{n+1} = 0,5 u_n + 3$, $v_n = u_n - 6$).

« Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5 u_n + 3 - 6 = 0,5 u_n - 3 = 0,5(u_n - 6) = 0,5 v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -5 \times 0,5^n$, et donc $u_n = v_n + 6 = 6 - 5 \times 0,5^n$. »

Attention : la raison est 0,5 (le coefficient de u_n), pas 6. Et v_0 n'est pas u_0 .

Situation 6 : limite par transformation d'écriture.

Fraction rationnelle. « Pour tout $n \geq 1$, $\frac{3n^2 - 5n + 1}{n^2 + 2} = \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}}$.

Comme $\frac{5}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{2}{n^2}$ tendent vers 0, le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1.

Par quotient, la limite vaut 3. »

Racines (quantité conjuguée). « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Comme $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$, son inverse tend vers 0. La limite vaut 0. »

Puissances. « Pour tout n , $3^n - 2^n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$, donc $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 1$. Comme $3 > 1$, $3^n \rightarrow +\infty$. Par produit, la limite est $+\infty$. »

Situation 7 : comparaison et gendarmes.

Comparaison. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geq -1$, donc $n + (-1)^n \geq n - 1$. Or $\lim(n - 1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim(n + (-1)^n) = +\infty$. »

Gendarmes. « Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Or $\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$. »

Écris les trois éléments : l'encadrement (avec « pour tout $n \geq \dots$ »), les deux limites égales, le nom du théorème.

Situation 8 : convergence, puis limite de $u_{n+1} = f(u_n)$.

« D'après les questions précédentes, (u_n) est croissante et majorée par 3.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ .

Comme $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n , $\ell \in [0; 3]$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+6}$ est continue sur $[0; 3]$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$, soit $\ell = \sqrt{\ell+6}$. Comme $\ell \geq 0$, cela entraîne $\ell^2 = \ell + 6$, soit $(\ell - 3)(\ell + 2) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 3$. »

Situation 9 : somme de termes.

« Pour $q \neq 1$, $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Ici $q = \frac{1}{2}$, et la somme contient $n + 1$ termes :

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, $\lim S_n = 2$. »

Pour une somme de la forme $u_k = 3k - 6 + 9\left(\frac{1}{3}\right)^k$, on sépare les trois parties (arithmétique, constante, géométrique), et on compte les termes.

Situation 10 : algorithmique.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1000
    while u < 2000:
        u = 1.05*u
        n = n + 1
    return n
```

« La boucle s'arrête dès que $u \geq 2000$. Elle se termine car $u_n = 1000 \times 1,05^n$ tend vers $+\infty$ ($1,05 > 1$). Par calcul, $u_{14} \approx 1979,9 < 2000$ et $u_{15} \approx 2078,9 \geq 2000$: la fonction renvoie 15. »

La fonction renvoie n (le rang), pas u_n . Et l'ordre des instructions dans la boucle peut changer le résultat.

Situation 11 : vrai/faux et contre-exemple.

« L'affirmation est **fausse**. Contre-exemple : la suite $u_n = (-1)^n$ est bornée ($-1 \leq u_n \leq 1$), mais elle ne converge pas. »

Pour une affirmation vraie, il faut une démonstration. Pour une affirmation fausse, un seul contre-exemple suffit, bien choisi et vérifié.

2. Avant / après sur les suites

a) Une hérédité. Montrer que $u_n \leq 2$ pour $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

« $u_{k+1} = \sqrt{u_k + 2} \leq 2$, donc c'est bon. »

« Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \leq 2$. Alors $u_k + 2 \leq 4$. La racine carrée étant croissante sur $[0; +\infty[$, $u_{k+1} = \sqrt{u_k + 2} \leq \sqrt{4} = 2$. »

L'hypothèse de récurrence est **utilisée** ($u_k \leq 2$), et la croissance de la racine est **citée**.

b) Une limite.

« $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \infty - \infty = 0$. »

« Pour tout n , $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc la limite est 0. »

c) Une comparaison.

« $u_n = n + \sin n \leq n + 1$ et $n + 1 \rightarrow +\infty$ donc $u_n \rightarrow +\infty$. »

« Pour tout n , $\sin n \geq -1$, donc $u_n \geq n - 1$. Comme $n - 1 \rightarrow +\infty$, par comparaison $u_n \rightarrow +\infty$. »

On **minore** pour conclure à $+\infty$: une majoration ne prouve rien.

3. Les erreurs de rédaction propres aux suites

- Écrire « pour tout n » dans l'hérédité au lieu de « soit $k \in \mathbb{N}$ fixé ».
- Une hérédité qui n'utilise jamais l'hypothèse de récurrence.
- Passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ **avant** d'avoir prouvé la convergence.
- Oublier de préciser que ℓ appartient à l'intervalle où f est continue.
- Garder deux solutions de $\ell = f(\ell)$ sans éliminer celle qui est incompatible avec l'encadrement.
- Confondre « majorée » et « converge », ou « bornée » et « converge ».
- Une suite auxiliaire dont on ne dit pas la raison, ou dont le premier terme est faux.
- Compter n termes au lieu de $n + 1$ dans une somme de $k = 0$ à n .
- Une conjecture présentée comme un résultat démontré.

4. La check-list du chapitre Suites

- Mes **quantificateurs** sont justes (« pour tout $n \in \mathbb{N}$ », « soit $k \in \mathbb{N}$ fixé »).
- Dans chaque hérédité, j'ai **utilisé** l'hypothèse de récurrence, et j'ai **conclu**.
- Chaque conclusion de convergence **nomme le théorème** et vérifie ses deux hypothèses.
- Avant de résoudre $\ell = f(\ell)$, j'ai vérifié : convergence prouvée, ℓ dans l'intervalle, f continue.
- Pour chaque limite, j'ai écrit la **transformation** (factorisation, conjuguée, terme dominant) puis la règle (somme, produit, quotient).
- J'ai vérifié mes formules avec $n = 0$ et $n = 1$.
- Dans une somme, j'ai compté **le bon nombre de termes**.
- Pour Python, j'ai testé mon script à la main sur les premières valeurs.

Si ton hérédité ne mentionne jamais l'hypothèse de récurrence, c'est que tu as démontré autre chose. Tu peux le vérifier en 5 secondes.