

Suites

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Exercice S1 : Abonnés d'une médiathèque

Une médiathèque compte 2 000 abonnés au 1^{er} janvier 2026. Chaque année, 15 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement, et 450 nouvelles personnes s'abonnent. On note u_n le nombre d'abonnés au 1^{er} janvier de l'année $2026 + n$ (valeurs non entières autorisées).

1. Justifier que $u_{n+1} = 0,85 u_n + 450$, puis calculer u_1 et u_2 .
2. On pose $v_n = u_n - 3\,000$. Montrer que (v_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
3. En déduire que $u_n = 3\,000 - 1\,000 \times 0,85^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que (u_n) est croissante. Déterminer sa limite et interpréter.
5. Compléter le script suivant pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq 2\,900$.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 2000
    while u < .....:
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

Calculer u_{14} et u_{15} (au centième près) pour donner la valeur renvoyée, puis l'année correspondante.

Exercice S2 : Une relation avec un terme en n

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + n$.
3. Montrer que (u_n) est strictement croissante, puis déterminer sa limite.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 10^6$ (on rappelle que $2^{10} = 1\,024$).

Exercice S3 : Une suite définie par une racine carrée

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8}$. On note $f(x) = \sqrt{2x + 8}$ pour $x \geq 0$.

1. Justifier que f est croissante sur $[0; +\infty[$, puis calculer u_1 (valeur exacte).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Déterminer la limite ℓ de (u_n) . On justifiera que ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$ et on éliminera toute solution incompatible.
5. Écrire une fonction Python `seuil()` renvoyant le plus petit entier n tel que $u_n > 3,999$, puis déterminer la valeur qu'elle renvoie en calculant les premiers termes à la calculatrice (valeurs approchées à 10^{-5} près).

Exercice S4 : Limites avec racines et somme encadrée

1. Déterminer la limite de $x_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$.
2. Déterminer la limite de $y_n = \sqrt{n} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n})$.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ (somme de n termes).
 - a) Montrer que $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq s_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.
 - b) En déduire la limite de (s_n) .

Exercice S5 : Une suite croissante qui diverge

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
3. On suppose que (u_n) est majorée.
 - a) Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ et que $\ell \geq 1$.
 - b) En passant à la limite dans la relation de récurrence, aboutir à une contradiction. En déduire la limite de (u_n) .
4. Compléter le script `seuil(A)` pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq A$, puis déterminer à la main la valeur renvoyée par `seuil(3)`.

```
def seuil(A):
    n = 0
    u = 1
    while .....:
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

Exercice S6 : Une suite homographique et une suite auxiliaire

Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge, puis déterminer sa limite ℓ .
4. On pose $w_n = \frac{1}{u_n} - 1$. Montrer que (w_n) est géométrique et en déduire l'expression de u_n en fonction de n .
5. Retrouver la limite de (u_n) à l'aide de cette expression.

Exercice S7 : Récurrence, gendarmes et somme

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 4$, $n^2 \leq 2^n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n}{2^n}$. Montrer que, pour $n \geq 4$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, puis déterminer la limite de (u_n) .
3. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n}$. Démontrer par récurrence que $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, puis déterminer la limite de (S_n) .

Exercice S8 : Deux cuves qui s'équilibrent

Deux cuves A et B contiennent initialement 1 litre et 7 litres d'eau. Chaque heure, un tiers du contenu de chaque cuve est transvasé dans l'autre cuve. On note u_n et v_n les volumes (en litres) de A et B après n heures : $u_0 = 1$ et $v_0 = 7$.

1. Justifier que $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$. Calculer u_1 et v_1 .
2. Montrer que la suite (s_n) définie par $s_n = u_n + v_n$ est constante.
3. Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
4. En déduire u_n et v_n en fonction de n , puis les limites de (u_n) et (v_n) . Interpréter.
5. Déterminer le plus petit entier n tel que $v_n - u_n < 0,01$.

Exercice S9 : Deux plans d'entraînement

Un coureur prépare une course. Le jour 1, il parcourt 2 km. Dans le plan A, la distance augmente de 10 % chaque jour par rapport à la veille. Dans le plan B, elle augmente de 0,5 km chaque jour. On note a_n et b_n les distances (en km) du jour $n \geq 1$, et A_n , B_n les distances cumulées sur les n premiers jours.

1. Préciser la nature de (a_n) et de (b_n) , puis exprimer a_n et b_n en fonction de n .
2. Montrer que $A_n = 20(1,1^n - 1)$ et que $B_n = \frac{n(n+7)}{4}$.
3. Écrire une fonction Python `jours_A()` qui renvoie le plus petit entier n tel que $A_n \geq 100$ (on accumulera les distances dans une variable `S`). Quelle valeur renvoie-t-elle ?
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $B_n \geq 100$.
5. Quel plan permet d'atteindre 100 km cumulés le plus tôt ? Quelle distance le coureur parcourt-il alors ce jour-là ?