

Corrigé : Suites

Fiche Standard

S1.

1. Perdre 15 % revient à multiplier par 0,85 ; il s'ajoute ensuite 450 abonnés : $u_{n+1} = 0,85u_n + 450$. Ainsi $u_1 = 0,85 \times 2000 + 450 = 2150$ et $u_2 = 0,85 \times 2150 + 450 = 2277,5$.
2. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85u_n - 2550 = 0,85(u_n - 3000) = 0,85v_n$. **Conclusion :** (v_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = 2000 - 3000 = -1000$.
3. $v_n = -1000 \times 0,85^n$, donc $u_n = 3000 + v_n = 3000 - 1000 \times 0,85^n$. Vérification : $u_1 = 3000 - 850 = 2150$.
4. $u_{n+1} - u_n = -1000 \times 0,85^n(0,85 - 1) = 150 \times 0,85^n > 0$: (u_n) est strictement croissante. Comme $-1 < 0,85 < 1$, $0,85^n \rightarrow 0$ et $\lim u_n = 3000$. **Interprétation :** le nombre d'abonnés augmente chaque année et se stabilise vers 3000 sans jamais l'atteindre ($u_n < 3000$).
5. Il faut `while u < 2900:` et `u = 0.85*u + 450`. On calcule $u_{14} \approx 2897,23 < 2900$ et $u_{15} \approx 2912,65 \geq 2900$. La suite étant croissante, **le script renvoie 15**, soit le 1^{er} janvier 2026 + 15 = 2041.

S2.

1. $u_1 = 2 \times 2 - 0 + 1 = 5$, $u_2 = 2 \times 5 - 1 + 1 = 10$, $u_3 = 2 \times 10 - 2 + 1 = 19$.
2. Soit $P(n)$: « $u_n = 2^{n+1} + n$ ». *Initialisation.* $2^1 + 0 = 2 = u_0$. *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 2^{k+1} + k$. Alors $u_{k+1} = 2(2^{k+1} + k) - k + 1 = 2^{k+2} + k + 1 = 2^{(k+1)+1} + (k+1)$. *Conclusion.* $u_n = 2^{n+1} + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cohérent avec $u_3 = 16 + 3 = 19$).
3. $u_{n+1} - u_n = 2^{n+2} + (n+1) - 2^{n+1} - n = 2^{n+1} + 1 > 0$: (u_n) est strictement croissante. Comme $2^{n+1} \rightarrow +\infty$ et $n \rightarrow +\infty$, par somme $\lim u_n = +\infty$.
4. $u_{18} = 2^{19} + 18 = 524\,306 \leq 10^6$ et $u_{19} = 2^{20} + 19 = 1\,048\,595 > 10^6$ (avec $2^{20} = 1\,024^2 = 1\,048\,576$). La suite étant croissante, **le plus petit entier est $n = 19$** .

S3.

1. La fonction $x \mapsto 2x + 8$ est croissante et positive sur $[0; +\infty[$, et la racine carrée est croissante : par composition, f est croissante. $u_1 = \sqrt{2 \times 1 + 8} = \sqrt{10}$.
2. Soit $P(n)$: « $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ ». *Initialisation.* $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{10}$ avec $1 \leq \sqrt{10} \leq 4$: $P(0)$ est vraie. *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$. Comme f est croissante, $f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$, c'est-à-dire $\sqrt{10} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \sqrt{16} = 4$. Comme $1 \leq \sqrt{10}$, on obtient $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$: $P(k+1)$ est vraie. *Conclusion.* $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. D'après 2, (u_n) est croissante et majorée par 4. **Conclusion :** elle converge (théorème de convergence monotone).
4. La suite converge vers ℓ et f est continue sur $[0; +\infty[$: en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$. De plus $\ell \geq 1$ car $u_n \geq 1$ pour tout n . Alors

$$\ell = \sqrt{2\ell + 8} \iff \ell \geq 0 \text{ et } \ell^2 - 2\ell - 8 = 0 \iff \ell \geq 0 \text{ et } (\ell - 4)(\ell + 2) = 0.$$

Les solutions de l'équation du second degré sont 4 et -2 ; -2 est exclu car $\ell \geq 1$. **Conclusion :** $\lim u_n = 4$.

5. `from math import sqrt`

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u <= 3.999:
        u = sqrt(2*u + 8)
        n = n + 1
    return n
```

On trouve $u_5 \approx 3,99661 \leq 3,999$ et $u_6 \approx 3,99915 > 3,999$. La suite étant croissante, **le script renvoie 6**.

S4.

1. Forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Pour $n \geq 1$, avec la quantité conjuguée : $x_n = \frac{(n^2 + 3n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}$. Comme $\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow 1$, par quotient $\lim x_n = \frac{3}{2}$.
2. Forme « $\infty \times 0$ ». $y_n = \sqrt{n} \times \frac{(n+4) - n}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}$ (on divise par $\sqrt{n} > 0$).
Par quotient, $\lim y_n = 2$.
3. a) Pour $1 \leq k \leq n$: $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, donc, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ étant décroissante, $\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$. En sommant ces n inégalités : $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq s_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.
b) $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \rightarrow 1$ et $\frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim s_n = 1$.

S5.

1. Soit $P(n)$: « $u_n \geq 1$ ». $u_0 = 1$: $P(0)$ est vraie. Si $u_k \geq 1$, alors $\frac{1}{u_k} > 0$ et $u_{k+1} = u_k + \frac{1}{u_k} > u_k \geq 1$: $P(k+1)$ est vraie. Donc $u_n \geq 1$ pour tout n .
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ car $u_n \geq 1 > 0$: (u_n) est strictement croissante.
3. a) Si (u_n) est majorée, comme elle est croissante, elle converge vers un réel ℓ . Pour tout n , $u_n \geq u_0 = 1$, donc $\ell \geq 1$ (en particulier $\ell \neq 0$).
b) $u_{n+1} \rightarrow \ell$ et $u_n + \frac{1}{u_n} \rightarrow \ell + \frac{1}{\ell}$. Par unicité de la limite, $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, soit $\frac{1}{\ell} = 0$: impossible.

La suite n'est donc pas majorée. Croissante et non majorée, **elle tend vers** $+\infty$.

4. def seuil(A) :

```

n = 0
u = 1
while u < A:
    u = u + 1/u
    n = n + 1
return n

```

Pour $A = 3$: $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 2,5$, $u_3 = 2,9 < 3$, $u_4 = 2,9 + \frac{1}{2,9} \approx 3,245 \geq 3$. **seuil(3) renvoie** 4.

S6.

1. $u_1 = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$ et $u_2 = \frac{1/3}{5/3} = \frac{1}{5}$.
2. Soit $P(n)$: « $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ ». $P(0)$ est vraie car $u_0 = \frac{1}{2}$. Soit k tel que $0 < u_k \leq \frac{1}{2}$. Alors $\frac{3}{2} \leq 2 - u_k < 2$, donc $2 - u_k > 0$ et $u_{k+1} = \frac{u_k}{2 - u_k} > 0$; de plus $0 < \frac{1}{2 - u_k} \leq \frac{2}{3}$, d'où $u_{k+1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$. Donc $P(k+1)$ est vraie, et $P(n)$ l'est pour tout n .
3. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_n(2 - u_n)}{2 - u_n} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2 - u_n} < 0$ car $u_n > 0$, $u_n - 1 < 0$ et $2 - u_n > 0$. La suite est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers ℓ , avec $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$. Par continuité de $x \mapsto \frac{x}{2-x}$ en ℓ , $\ell = \frac{\ell}{2-\ell}$, d'où $\ell(2-\ell) = \ell$, soit $\ell(1-\ell) = 0$: $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Comme $\ell \leq \frac{1}{2}$, $\ell = 0$.
4. w_n est bien défini car $u_n > 0$. $w_{n+1} = \frac{2-u_n}{u_n} - 1 = \frac{2}{u_n} - 2 = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) = 2w_n$. (w_n) est géométrique de raison 2 et $w_0 = 2 - 1 = 1$. Donc $w_n = 2^n$, $\frac{1}{u_n} = 1 + 2^n$ et $u_n = \frac{1}{1 + 2^n}$.
Vérification : $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{1}{5}$.

5. $2^n \rightarrow +\infty$, donc $1 + 2^n \rightarrow +\infty$ et $u_n \rightarrow 0$: on retrouve $\ell = 0$.

S7.

1. Soit $P(n)$: « $n^2 \leq 2^n$ », pour $n \geq 4$. *Initialisation.* $4^2 = 16 = 2^4$. *Hérédité.* Soit $k \geq 4$ tel que $k^2 \leq 2^k$. Alors $2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2k^2$. Or $2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 \geq 9 - 2 > 0$ car $k-1 \geq 3$. Donc $2^{k+1} \geq (k+1)^2$. *Conclusion.* $n^2 \leq 2^n$ pour tout $n \geq 4$.
2. Pour $n \geq 4$, $u_n \geq 0$ et $2^n \geq n^2$ donne $u_n = \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, par les gendarmes $\lim u_n = 0$.
3. Soit $P(n)$: « $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ ». *Initialisation.* $S_1 = \frac{1}{2}$ et $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. *Hérédité.* Soit $k \geq 1$ tel que $S_k = 2 - \frac{k+2}{2^k}$. Alors

$$S_{k+1} = S_k + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2(k+2)}{2^{k+1}} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} = 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}.$$

Conclusion. La formule est vraie pour tout $n \geq 1$. Enfin $\frac{n+2}{2^n} = u_n + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, donc $\lim S_n = 2$.

S8.

1. La cuve A garde $\frac{2}{3}$ de son contenu et reçoit $\frac{1}{3}$ du contenu de B : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n$. De même $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n$. Donc $u_1 = \frac{2+7}{3} = 3$ et $v_1 = \frac{1+14}{3} = 5$.
2. $s_{n+1} = \frac{2u_n + v_n + u_n + 2v_n}{3} = u_n + v_n = s_n$. La suite (s_n) est constante : $s_n = s_0 = 8$ (le volume total est conservé).
3. $w_{n+1} = \frac{(u_n + 2v_n) - (2u_n + v_n)}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{1}{3}w_n$. **Conclusion :** (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $w_0 = 6$.
4. $w_n = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $u_n + v_n = 8$ et $v_n - u_n = w_n$: $u_n = \frac{8 - w_n}{2} = 4 - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $v_n = \frac{8 + w_n}{2} = 4 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Vérification : $u_1 = 3$, $v_1 = 5$. Comme $\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$, $\lim u_n = \lim v_n = 4$. **Interprétation :** les deux cuves tendent vers le même volume, la moitié du total.
5. $v_n - u_n = \frac{6}{3^n} < 0,01 \iff 3^n > 600$. Or $3^5 = 243 \leq 600$ et $3^6 = 729 > 600$. **Réponse :** $n = 6$.

S9.

1. (a_n) est géométrique de raison 1,1 et de premier terme $a_1 = 2$: $a_n = 2 \times 1,1^{n-1}$. (b_n) est arithmétique de raison 0,5 et de premier terme $b_1 = 2$: $b_n = 2 + 0,5(n-1) = 1,5 + 0,5n$.
2. A_n est la somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 1,1 : $A_n = 2 \times \frac{1 - 1,1^n}{1 - 1,1} = 20(1,1^n - 1)$. $B_n = n \times \frac{b_1 + b_n}{2} = n \times \frac{2 + 1,5 + 0,5n}{2} = \frac{n(n+7)}{4}$. Vérification pour $n = 1$: $A_1 = 2$ et $B_1 = 2$.
3.

```
def jours_A():
    n = 1
    a = 2
    S = 2
    while S < 100:
        a = 1.1*a
        S = S + a
        n = n + 1
    return n
```

$A_{18} = 20(1,1^{18} - 1) \approx 91,20 < 100$ et $A_{19} = 20(1,1^{19} - 1) \approx 102,32 \geq 100$. La suite (A_n) étant croissante, le script renvoie 19.
4. $B_n \geq 100 \iff n^2 + 7n - 400 \geq 0$. Or $B_{16} = \frac{16 \times 23}{4} = 92 < 100$ et $B_{17} = \frac{17 \times 24}{4} = 102 \geq 100$, et

(B_n) est croissante : $n = 17$.

- 5. Conclusion :** le plan B atteint 100 km cumulés en 17 jours, contre 19 pour le plan A. Le jour 17, le coureur parcourt $b_{17} = 1,5 + 8,5 = 10$ km.