

Suites**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstrations : l'inégalité de Bernoulli et les suites géométriques

1. Soit a un réel positif. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
2. Soit $q > 1$. En appliquant 1. avec $a = q - 1$, montrer que $\lim q^n = +\infty$.
3. Soit $q \in]0; 1[$. En considérant $\frac{1}{q}$, montrer que $\lim q^n = 0$.
4. Soit $q \in]-1; 0[$. Montrer que $\lim q^n = 0$.
5. Application : montrer que, pour tout entier $n \geq 500\,001$, $1,000\,002^n > 2$.

Exercice D2 : Démonstrations à partir de la définition

Dans cet exercice, on utilise uniquement la définition : (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , $u_n > A$ à partir d'un certain rang ; (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient u_n à partir d'un certain rang.

1. *Théorème de comparaison.* Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \geq v_n$ pour tout $n \geq n_0$, et $\lim v_n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$.
 - a) Justifier qu'il existe N_1 tel que $v_n > A$ pour tout $n \geq N_1$.
 - b) Montrer que $u_n > A$ pour tout $n \geq \max(n_0, N_1)$. Conclure.
2. *Suite croissante non majorée.* Soit (u_n) croissante et non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$.
 - a) Justifier qu'il existe un entier N tel que $u_N > A$.
 - b) Montrer que $u_n > A$ pour tout $n \geq N$. Conclure.
3. *Limite d'une suite croissante.* Soit (u_n) croissante, convergeant vers ℓ . On veut montrer que $u_n \leq \ell$ pour tout n . On suppose qu'il existe p tel que $u_p > \ell$, et on pose $\delta = u_p - \ell$.
 - a) Montrer que l'intervalle $I =]\ell - \delta; u_p[$ contient ℓ .
 - b) Montrer qu'il existe $N \geq p$ tel que $u_N \in I$, puis aboutir à une contradiction.

Exercice D3 : Deux sommes : l'une converge, l'autre diverge

Pour $n \geq 1$, on pose $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que (A_n) et (H_n) sont strictement croissantes.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $A_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que (A_n) converge et que sa limite est inférieure ou égale à 2.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ (on minorera chacun des n termes de la différence).
4. On suppose que (H_n) converge vers un réel L . Justifier que (H_{2n}) converge aussi vers L , puis aboutir à une contradiction. En déduire la limite de (H_n) .
5. Écrire une fonction Python `rang()` renvoyant le plus petit entier n tel que $H_n \geq 4$. Que renvoie-t-elle ? On donnera H_{30} et H_{31} à 10^{-3} près.

Exercice D4 : Suite récurrente avec paramètre

Soit a un réel. On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$. On pose $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

1. Montrer que $f(x) - x = (x - 1)(x - 2)$. En déduire les réels ℓ tels que $f(\ell) = \ell$.
2. Que dire de (u_n) si $a = 1$? si $a = 2$?
3. On suppose $1 < a < 2$.
 - a) Montrer que, pour tout n , $1 < u_n < 2$.
 - b) Montrer que (u_n) est décroissante, puis qu'elle converge. Déterminer sa limite.
4. On suppose $a > 2$.

- a) Montrer que, pour tout n , $u_n > 2$, puis que (u_n) est strictement croissante.
- b) En raisonnant par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas majorée. Conclure.
5. On suppose $a < 1$. Exprimer u_1 en fonction de a . En utilisant ce qui précède, résumer la limite de (u_n) selon les valeurs de a (on distinguera $a < 0$, $a = 0$ et $0 < a < 1$).

Exercice D5 : Une suite non monotone qui converge

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. On note $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 . La suite est-elle monotone ?
2. Vérifier que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ et que $\frac{3}{2} < \varphi < 2$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \varphi = \frac{\varphi - u_n}{\varphi u_n}$. En déduire que $|u_{n+1} - \varphi| \leq \frac{2}{3} |u_n - \varphi|$.
5. Démontrer par récurrence que $|u_n - \varphi| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, puis en déduire la limite de (u_n) .
6. Compléter le script pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que $|u_n - \varphi| < 10^{-6}$, puis donner la valeur renvoyée.

```
from math import sqrt
```

```
def rang():
    phi = (1 + sqrt(5)) / 2
    n = 0
    u = 1
    while .....:
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

Exercice D6 : Lancers francs (exercice de type bac)

Un joueur tente une série de lancers francs. Au premier lancer, il réussit avec la probabilité 0,5. Ensuite, s'il réussit un lancer, il réussit le suivant avec la probabilité 0,8 ; s'il le manque, il réussit le suivant avec la probabilité 0,3. Pour $n \geq 1$, on note R_n l'événement « le n -ième lancer est réussi » et $p_n = P(R_n)$.

1. Calculer p_2 à l'aide d'un arbre pondéré ou de la formule des probabilités totales.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,3$.
3. On pose $v_n = p_n - 0,6$. Montrer que (v_n) est géométrique ; en déduire que $p_n = 0,6 - 0,1 \times 0,5^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
4. Étudier le sens de variation de (p_n) et déterminer sa limite. Interpréter.
5. Écrire une fonction Python renvoyant le plus petit entier n tel que $p_n > 0,599$, puis donner la valeur renvoyée en justifiant par le calcul.
6. Soit X_n le nombre de lancers réussis parmi les n premiers. On admet que $E(X_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$. Exprimer $E(X_n)$ en fonction de n , puis déterminer la limite de $\frac{E(X_n)}{n}$.

Exercice D7 : Définition de la limite et suites bornées

1. Soit $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $|u_n - 2| < \varepsilon$ dès que $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$.
 - b) En déduire que (u_n) converge vers 2, directement par la définition.
2. Montrer que la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite finie. On supposera qu'elle converge vers un réel ℓ et on considérera l'intervalle $]\ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2}[$.

- Montrer qu'une suite convergente est bornée : si (u_n) converge vers ℓ , on considérera un rang N à partir duquel $u_n \in]\ell - 1; \ell + 1[$.
- La réciproque est-elle vraie ? Et une suite non bornée tend-elle nécessairement vers $+\infty$ ou $-\infty$? Donner un exemple pour chaque question.

Exercice D8 : Archimède et le calcul de π

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le polygone régulier à 6×2^n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 (pour $n = 0$: l'hexagone régulier). On note c_n la longueur d'un côté et on pose $p_n = 3 \times 2^n c_n$ (demi-périmètre du polygone). On admet les résultats géométriques suivants, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $c_0 = 1$ et $c_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$;
 - $p_n \leq \pi$ (le périmètre d'un polygone inscrit est inférieur à celui du cercle, qui vaut 2π) ;
 - le polygone régulier circonscrit au cercle, qui a le même nombre de côtés, a pour côté $d_n = \frac{2c_n}{\sqrt{4 - c_n^2}}$; son demi-périmètre $q_n = 3 \times 2^n d_n$ vérifie $q_n \geq \pi$.
- Calculer les valeurs exactes de c_1 et c_2 , puis les valeurs de p_0 , p_1 et p_2 à 10^{-4} près.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n^2 = c_{n+1}^2 (4 - c_{n+1}^2)$ (on isolera la racine carrée dans la relation de récurrence, puis on élèvera au carré). En déduire que $c_n \leq 2c_{n+1}$, puis que la suite (p_n) est croissante.
 - Montrer que (p_n) converge vers un réel L vérifiant $L \leq \pi$.
 - Montrer que $0 \leq c_n \leq \frac{\pi}{3 \times 2^n}$ et en déduire la limite de (c_n) . Exprimer q_n en fonction de p_n et de c_n , puis déterminer la limite de (q_n) .
 - Conclure que $L = \pi$.
 - Compléter le script suivant pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que $q_n - p_n < \varepsilon$, ainsi que les valeurs de p_n et q_n . Donner le résultat de `archimede(1e-3)`, arrondi à 10^{-5} près pour p_n et q_n .

```
from math import sqrt
```

```
def archimede(eps):
    n = 0
    c = 1
    p = 3
    q = 2*sqrt(3)
    while .....:
        c = .....
        n = n + 1
        p = .....
        q = .....
    return n, p, q
```

- Pour $n = 4$ (polygones à 96 côtés, ceux d'Archimède), on donne $p_4 \geq 3,14103$ et $q_4 \leq 3,14272$. Vérifier que l'on retrouve l'encadrement d'Archimède $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.