

Corrigé : Suites

Fiche Défi

D1.

1. Soit $P(n) : \ll (1+a)^n \geq 1+na \gg$. *Initialisation.* $(1+a)^0 = 1 = 1+0 \times a : P(0)$ est vraie. *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $(1+a)^k \geq 1+ka$. Comme $1+a > 0$, on multiplie : $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) = 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$ car $ka^2 \geq 0$. Donc $P(k+1)$ est vraie. *Conclusion.* $(1+a)^n \geq 1+na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Avec $a = q-1 > 0 : q^n \geq 1+n(q-1)$. Or $q-1 > 0$, donc $1+n(q-1) \rightarrow +\infty$. Par comparaison, $\lim q^n = +\infty$.
3. Comme $0 < q < 1$, $\frac{1}{q} > 1$ et, d'après 2., $\left(\frac{1}{q}\right)^n \rightarrow +\infty$. Donc $q^n = \frac{1}{(1/q)^n}$ est l'inverse d'une suite qui tend vers $+\infty : \lim q^n = 0$.
4. On a $|q| \in]0; 1[$, donc $|q|^n \rightarrow 0$ d'après 3. Or $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$. Par le théorème des gendarmes, $\lim q^n = 0$.
5. Avec $a = 2 \times 10^{-6} > 0 : 1,000\,002^n \geq 1+2 \times 10^{-6}n$. Pour $n \geq 500\,001$, $2 \times 10^{-6}n \geq 1,000\,002$, donc $1,000\,002^n \geq 2,000\,002 > 2$.

D2.

1. a) $\lim v_n = +\infty$: l'intervalle $]A; +\infty[$ contient v_n à partir d'un certain rang N_1 .
b) Soit $n \geq \max(n_0, N_1)$. Alors $u_n \geq v_n$ (car $n \geq n_0$) et $v_n > A$ (car $n \geq N_1$), donc $u_n > A$.
Conclusion : pour tout réel A , $u_n > A$ à partir d'un certain rang : $\lim u_n = +\infty$.
2. a) (u_n) n'est pas majorée : A n'est pas un majorant, donc il existe N avec $u_N > A$.
b) Soit $n \geq N$. Comme (u_n) est croissante, $u_n \geq u_N > A$. **Conclusion :** $u_n > A$ pour tout $n \geq N$; A étant quelconque, $\lim u_n = +\infty$.
3. a) $\delta > 0$, donc $\ell - \delta < \ell$; et $\ell < \ell + \delta = u_p$. Ainsi $\ell \in I$.
b) I est un intervalle ouvert contenant ℓ : il existe N_0 tel que $u_n \in I$ pour tout $n \geq N_0$. Soit $N = \max(N_0, p)$. Alors $u_N < u_p$ (car $u_N \in I$). Mais $N \geq p$ et (u_n) est croissante, donc $u_N \geq u_p$: contradiction. **Conclusion :** pour tout n , $u_n \leq \ell$.

D3.

1. $A_{n+1} - A_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$.
2. Soit $P(n) : \ll A_n \leq 2 - \frac{1}{n} \gg$. *Initialisation.* $A_1 = 1 = 2 - 1 : P(1)$ est vraie. *Hérédité.* Soit $k \geq 1$ tel que $A_k \leq 2 - \frac{1}{k}$. Alors $A_{k+1} = A_k + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$. Or

$$\left(2 - \frac{1}{k+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)^2} \geq 0$$

car $k(k+1) \leq (k+1)^2$. Donc $A_{k+1} \leq 2 - \frac{1}{k+1} : P(k+1)$ est vraie. *Conclusion.* $A_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi $A_n < 2 : (A_n)$ est croissante et majorée par 2, donc elle **converge**, vers un réel $\ell \leq 2$ (passage à la limite dans $A_n \leq 2$).

3. $H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} : n$ termes, tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2n}$. Donc $H_{2n} - H_n \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.
4. Si $H_n \rightarrow L$, tout intervalle ouvert J contenant L contient H_m pour $m \geq N$; pour $n \geq N$, on a $2n \geq N$, donc $H_{2n} \in J : H_{2n} \rightarrow L$. Alors $H_{2n} - H_n \rightarrow 0$. Par passage à la limite dans l'inégalité du 3., $0 \geq \frac{1}{2}$: contradiction. Donc (H_n) ne converge pas. Étant croissante, si elle était majorée elle convergerait : elle n'est donc pas majorée. **Conclusion :** $\lim H_n = +\infty$.
5. **def rang() :**
 n = 0

```

H = 0
while H < 4:
    n = n + 1
    H = H + 1/n
return n

```

On trouve $H_{30} \approx 3,995 < 4$ et $H_{31} \approx 4,027 \geq 4$. La suite étant croissante, **rang()** renvoie 31.

D4.

1. $f(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Donc $f(\ell) = \ell \iff \ell = 1$ ou $\ell = 2$.
2. $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$: si $a = 1$ (respectivement $a = 2$), alors $u_n = a$ pour tout n : la suite est constante, de limite 1 (respectivement 2).
3. a) Soit $P(n)$: « $1 < u_n < 2$ ». $P(0)$ est vraie. Soit k tel que $1 < u_k < 2$. Alors $u_{k+1} - 1 = (u_k - 1)^2$ avec $0 < u_k - 1 < 1$, donc $0 < u_{k+1} - 1 < 1$, soit $1 < u_{k+1} < 2$. Donc $P(n)$ est vraie pour tout n .
 b) $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2) < 0$ car $u_n - 1 > 0$ et $u_n - 2 < 0$: (u_n) est strictement décroissante. Elle est minorée par 1 : elle converge vers ℓ avec $1 \leq \ell \leq u_0 = a < 2$. Par continuité de f , $f(\ell) = \ell$, donc $\ell \in \{1; 2\}$; comme $\ell < 2$, $\ell = 1$.
4. a) Si $u_k > 2$, alors $u_k - 1 > 1$, donc $u_{k+1} - 1 = (u_k - 1)^2 > 1$ et $u_{k+1} > 2$; $u_0 = a > 2$. Par récurrence, $u_n > 2$ pour tout n . Alors $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2) > 0$: (u_n) est strictement croissante.
 b) Supposons (u_n) majorée : elle converge vers ℓ avec $f(\ell) = \ell$, donc $\ell \in \{1; 2\}$. Mais (u_n) est croissante, donc $\ell \geq u_0 = a > 2$: contradiction. La suite est croissante et non majorée : $\lim u_n = +\infty$.
5. $u_1 = f(a) = (a-1)^2 + 1$.
 - Si $a < 0$: $a-1 < -1$, donc $(a-1)^2 > 1$ et $u_1 > 2$. La suite $(u_{n+1})_n$ est celle du cas $a > 2$: $\lim u_n = +\infty$.
 - Si $a = 0$: $u_1 = 2$, puis la suite est constante : $\lim u_n = 2$.
 - Si $0 < a < 1$: $-1 < a-1 < 0$, donc $0 < (a-1)^2 < 1$ et $1 < u_1 < 2$. On applique le cas 3. à partir du rang 1 : $\lim u_n = 1$.

Bilan : avec les cas 2. et 3., la limite vaut 1 si $0 < a < 2$ ($a = 1$ compris), 2 si $a = 0$ ou $a = 2$, et $+\infty$ si $a < 0$ ou $a > 2$.

D5.

1. $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{3}{2}$, $u_3 = \frac{5}{3}$, $u_4 = \frac{8}{5}$. On a $u_0 < u_1$ puis $u_1 > u_2$: **la suite n'est pas monotone**.
2. $1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$. Or $\varphi^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \varphi + 1$, donc $1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi$. De plus $2 < \sqrt{5} < 3$ donne $\frac{3}{2} < \varphi < 2$.
3. $P(0)$ est vraie ($u_0 = 1$). Si $1 \leq u_k \leq 2$, alors $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_k} \leq 1$, donc $\frac{3}{2} \leq u_{k+1} \leq 2$, d'où $1 \leq u_{k+1} \leq 2$.
4. $u_{n+1} - \varphi = \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - u_n}{\varphi u_n}$. Comme $u_n \geq 1$, $\varphi u_n \geq \varphi > \frac{3}{2}$, donc $\frac{1}{\varphi u_n} < \frac{2}{3}$ et $|u_{n+1} - \varphi| \leq \frac{2}{3}|u_n - \varphi|$.
5. Soit $Q(n)$: « $|u_n - \varphi| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ». *Initialisation.* $|u_0 - \varphi| = \varphi - 1 < 1$ car $\varphi < 2$. *Hérédité.* Si $Q(k)$ est vraie, alors $|u_{k+1} - \varphi| \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$. Donc $Q(n)$ est vraie pour tout n . Comme $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $|u_n - \varphi| \rightarrow 0$: $\lim u_n = \varphi$.
6.

```
while abs(u - phi) >= 1e-6:
    u = 1 + 1/u
```

Le calcul donne $|u_{14} - \varphi| \approx 1,2 \times 10^{-6} \geq 10^{-6}$ et $|u_{15} - \varphi| \approx 4,6 \times 10^{-7} < 10^{-6}$. **Le script renvoie 15** (on parcourt les termes dans l'ordre, la boucle s'arrête au premier rang convenable).

D6.

1. D'après les probabilités totales : $p_2 = 0,8 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5 = 0,55$.
2. Les événements R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition : $p_{n+1} = P_{R_n}(R_{n+1})p_n + P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})(1 - p_n) = 0,8p_n + 0,3(1 - p_n) = 0,5p_n + 0,3$.
3. $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,6 = 0,5p_n - 0,3 = 0,5(p_n - 0,6) = 0,5v_n$. **Conclusion :** (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_1 = 0,5 - 0,6 = -0,1$. Donc $v_n = -0,1 \times 0,5^{n-1}$ et $p_n = 0,6 - 0,1 \times 0,5^{n-1}$ (vérification : $p_2 = 0,55$).
4. $p_{n+1} - p_n = 0,1 \times 0,5^{n-1}(1 - 0,5) = 0,05 \times 0,5^{n-1} > 0$: (p_n) est strictement croissante. Comme $-1 < 0,5 < 1$, $0,5^{n-1} \rightarrow 0$ et $\lim p_n = 0,6$. **Interprétation :** à long terme, la probabilité de réussir un lancer se stabilise à 60 %.
5.

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while p <= 0.599:
        p = 0.5*p + 0.3
        n = n + 1
    return n
```

 $p_n > 0,599 \iff 0,1 \times 0,5^{n-1} < 0,001 \iff 2^{n-1} > 100$. Or $2^6 = 64 \leq 100$ et $2^7 = 128 > 100$. **Le script renvoie $n = 8$.**
6. $E(X_n) = \sum_{k=1}^n (0,6 - 0,1 \times 0,5^{k-1}) = 0,6n - 0,1 \times \frac{1 - 0,5^n}{1 - 0,5} = 0,6n - 0,2(1 - 0,5^n)$ (vérification : $n = 1$ donne 0,5, $n = 2$ donne 1,05 = $p_1 + p_2$). Alors $\frac{E(X_n)}{n} = 0,6 - \frac{0,2(1 - 0,5^n)}{n}$ et $0 \leq \frac{0,2(1 - 0,5^n)}{n} \leq \frac{0,2}{n} \rightarrow 0$. Par gendarmes, **la limite vaut 0,6** : en moyenne, 60 % des lancers sont réussis.

D7.

1. a) $u_n - 2 = \frac{2n + 1 - 2n - 2}{n + 1} = \frac{-1}{n + 1}$, donc $|u_n - 2| = \frac{1}{n + 1} < \varepsilon \iff n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$.
b) Soit N un entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$. Pour tout $n \geq N$, $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, donc $|u_n - 2| < \varepsilon$, c'est-à-dire $u_n \in]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$. Tout intervalle ouvert contenant 2 contient un intervalle de ce type : $\lim u_n = 2$.
2. Supposons $(-1)^n \rightarrow \ell$. L'intervalle $I =]\ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2}[$ (de longueur 1) contient $(-1)^n$ pour $n \geq N$. Pour $n \geq N$ pair et $n + 1$ impair, 1 et -1 appartiennent à I , donc leur distance 2 est inférieure à la longueur 1 de I : absurde. **Conclusion :** la suite n'a pas de limite finie.
3. Soit N tel que $u_n \in]\ell - 1; \ell + 1[$ pour $n \geq N$. Soit $M = \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$. Pour $n < N$, $|u_n| \leq M$; pour $n \geq N$, $|u_n| \leq |\ell| + 1 \leq M$. **Conclusion :** (u_n) est bornée.
4. Non : $((-1)^n)$ est bornée mais ne converge pas. Non : $u_n = n(1 + (-1)^n)$ n'est pas bornée (car $u_{2p} = 4p$) et ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ (car $u_{2p+1} = 0$).

D8.

1. $c_1 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0,5176$. Puis $c_2 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_1^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \approx 0,2611$.
 $p_0 = 3 \times 1 = 3$, $p_1 = 6c_1 \approx 3,1058$, $p_2 = 12c_2 \approx 3,1326$.
2. De $c_{n+1}^2 = 2 - \sqrt{4 - c_n^2}$, on tire $\sqrt{4 - c_n^2} = 2 - c_{n+1}^2$. En élevant au carré : $4 - c_n^2 = 4 - 4c_{n+1}^2 + c_{n+1}^4$, donc $c_n^2 = 4c_{n+1}^2 - c_{n+1}^4 = c_{n+1}^2(4 - c_{n+1}^2)$.
Comme $c_{n+1}^2 \geq 0$ et $4 - c_{n+1}^2 \leq 4$, on a $c_n^2 \leq 4c_{n+1}^2$, donc $c_n \leq 2c_{n+1}$ (deux nombres positifs, la racine carrée est croissante). Alors

$$p_{n+1} = 3 \times 2^{n+1}c_{n+1} = 3 \times 2^n \times 2c_{n+1} \geq 3 \times 2^n c_n = p_n.$$

Conclusion : (p_n) est croissante.

3. (p_n) est croissante et majorée par π : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge

vers un réel L . Comme $p_n \leq \pi$ pour tout n , le passage à la limite dans l'inégalité large donne $L \leq \pi$.

4. Un côté est une longueur, donc $c_n \geq 0$. De $p_n \leq \pi$, on tire $3 \times 2^n c_n \leq \pi$, soit $c_n \leq \frac{\pi}{3 \times 2^n}$. Comme $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, et d'après le théorème des gendarmes, $\lim c_n = 0$.

Par ailleurs $q_n = 3 \times 2^n \times \frac{2c_n}{\sqrt{4-c_n^2}} = \frac{2p_n}{\sqrt{4-c_n^2}}$. Quand $n \rightarrow +\infty$, $4 - c_n^2 \rightarrow 4$, donc $\sqrt{4-c_n^2} \rightarrow 2$;

avec $p_n \rightarrow L$: $\lim q_n = \frac{2L}{2} = L$.

5. Pour tout n , $p_n \leq \pi \leq q_n$. En passant à la limite dans ces inégalités larges : $L \leq \pi \leq L$. **Conclusion :** $\lim p_n = \lim q_n = \pi$, et (p_n) , (q_n) fournissent des encadrements de plus en plus fins de π .
6. On commence avec $c = 1$, $p = 3$ et $q = 2\sqrt{3}$ (valeurs pour $n = 0$). Boucle :

```
while q - p >= eps:
    c = sqrt(2 - sqrt(4 - c**2))
    n = n + 1
    p = 3 * 2**n * c
    q = 2 * p / sqrt(4 - c**2)
```

Valeurs de $q_n - p_n$: 0,4641 ($n = 0$), 0,1096, 0,0270, 0,0067, 0,00168 ($n = 4$), 0,00042 ($n = 5$).
Premier écart $< 10^{-3}$: $n = 5$.

Conclusion : `archimede(1e-3)` renvoie (5 ; 3,14145 ; 3,14187), d'où $3,14145 \leq \pi \leq 3,14187$.

7. $3 + \frac{10}{71} \approx 3,14085 < 3,14103 \leq p_4 \leq \pi$ et $\pi \leq q_4 \leq 3,14272 < 3,14286 \approx 3 + \frac{1}{7}$. **Conclusion :**
 $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$, encadrement obtenu par Archimède avec ses polygones à 96 côtés.