

Suites

Nom : _____

Fiche Bases

Date : _____

Exercice B1 : Calculer des termes

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 5$. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
2. Soit (w_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{2n+1}{n+3}$. Calculer w_0 , w_1 , w_2 et w_{10} .

Exercice B2 : Sens de variationÉtudier le sens de variation de chaque suite (définie pour $n \in \mathbb{N}$).

1. $u_n = n^2 - 6n$: calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe selon n .
2. $v_n = 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$: comparer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1.
3. $w_n = \frac{2n+1}{n+3}$: montrer que $w_{n+1} - w_n = \frac{5}{(n+3)(n+4)}$ et conclure.

Exercice B3 : Raisonnement par récurrence

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n \geq 4n + 1$. En déduire la limite de (5^n) .
2. Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_1 et u_2 , puis démontrer par récurrence que $u_n = 3^n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice B4 : Limites par factorisationDéterminer la limite de chaque suite (les limites sont prises quand $n \rightarrow +\infty$).

1. $u_n = n^2 - 4n + 1$
2. $v_n = \frac{4n+1}{2n-3}$
3. $w_n = \frac{n^2+1}{n^3+2}$
4. $x_n = \frac{3n^2-1}{n+5}$
5. $y_n = \frac{-n^3+2n}{2n^3+1}$

Exercice B5 : Suites géométriques et sommes

1. Déterminer la limite de chaque suite, ou justifier qu'elle n'en a pas.
 - a) $a_n = 0,8^n$
 - b) $b_n = 6 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 - c) $c_n = 1,5^n - 100$
 - d) $d_n = (-1,2)^n$
 - e) $e_n = \frac{2^n + 3^n}{4^n}$
2. Calculer $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = 5 + 2 + \frac{4}{5} + \dots$, somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{2}{5}$. Exprimer T_n en fonction de n , puis déterminer la limite de (T_n) .

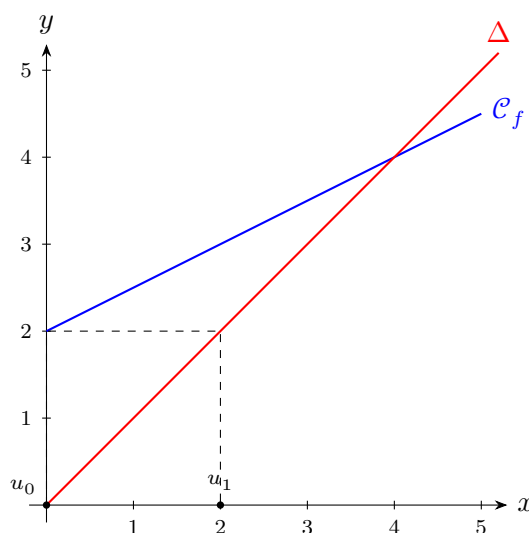
Exercice B6 : Comparaison et gendarmes

Déterminer la limite de chaque suite en justifiant par un encadrement.

1. $u_n = n^2 + 5 \cos n$
2. $v_n = -3n + 2 \sin n$
3. $w_n = \frac{2 + \cos n}{n^2}$, pour $n \geq 1$
4. $t_n = \frac{3n + (-1)^n}{n}$, pour $n \geq 1$

Exercice B7 : Lecture graphique : l'escalier

On considère $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0,5x + 2$. On a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ d'équation $y = x$, et le début de la construction.



1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Poursuivre la construction sur la figure et placer u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
3. Conjecturer le sens de variation de (u_n) et sa limite.
4. Résoudre l'équation $\ell = 0,5\ell + 2$. Que représente la solution ?

Exercice B8 : Python : terme et seuil

1. On considère le script suivant.

```
def terme(n):
    u = 10
    for i in range(n):
        u = 0.5*u + 4
    return u
```

Quelle suite (u_n) ce script calcule-t-il ? Quelle valeur renvoie `terme(3)` ?

2. On considère le script suivant.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 200
    while u < 300:
        u = 1.1*u
        n = n + 1
    return n
```

Exécuter ce script à la main (tableau des valeurs de n et u) et donner la valeur renvoyée. Que représente-t-elle ?

3. Modifier le script pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que $200 \times 1,1^n \geq 500$. Quelle valeur renvoie-t-il ?

4. On revient à la fonction `terme` de la question 1 et on exécute `L = [terme(k) for k in range(4)]`. Donner le contenu de la liste `L`.

Exercice B9 : Vrai ou faux ?

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis justifier (démonstration ou contre-exemple).

1. Toute suite croissante est minorée.
2. Si (u_n) tend vers 0, alors $((-1)^n u_n)$ tend vers 0.
3. Toute suite croissante et majorée converge.
4. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.
5. Si $u_n \leq v_n$ pour tout n et si (v_n) converge, alors (u_n) converge.
6. Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
7. Énoncer la contraposée de l'implication « si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge », puis sa réciproque. La contraposée est-elle vraie ? La réciproque est-elle vraie ? Pour une suite croissante, « être majorée » est-elle une condition nécessaire, suffisante, ou nécessaire et suffisante pour converger ?

Exercice B10 : La définition de la limite

1. Soit $u_n = 3n - 1$. Déterminer le plus petit entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n > 10\,000$.
2. Soit $v_n = 2 + \frac{3}{n+1}$. Déterminer le plus petit entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $|v_n - 2| < 0,01$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer un entier N_ε (en fonction de ε) tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|v_n - 2| < \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?
4. Soit $w_n = 5 - 2n^2$. Déterminer le plus petit entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $w_n < -1\,000$. Que peut-on dire de la limite de (w_n) ?