

Corrigé : Suites

Fiche Bases

B1.

1. $u_1 = 2 \times 3 - 5 = 1$, $u_2 = 2 \times 1 - 5 = -3$, $u_3 = 2 \times (-3) - 5 = -11$. On a $u_1 - u_0 = -2$ et $u_2 - u_1 = -4$: les différences ne sont pas constantes, la suite n'est pas arithmétique. On a $\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{3}$ et $\frac{u_2}{u_1} = -3$: les quotients ne sont pas constants, la suite n'est pas géométrique.
2. $w_0 = \frac{1}{3}$, $w_1 = \frac{3}{4}$, $w_2 = \frac{5}{5} = 1$, $w_{10} = \frac{21}{13}$.

B2.

1. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) - n^2 + 6n = 2n - 5$. Cette différence est négative pour $n \leq 2$ et positive pour $n \geq 3$. Donc $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ puis (u_n) est strictement croissante à partir du rang 3.
Conclusion : la suite n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$ (décroissante jusqu'au rang 3, croissante ensuite).
2. Tous les termes sont strictement positifs et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{4} < 1$, donc $v_{n+1} < v_n$. **Conclusion** : (v_n) est strictement décroissante.
3. $w_{n+1} = \frac{2n+3}{n+4}$, donc

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{(2n+3)(n+3) - (2n+1)(n+4)}{(n+3)(n+4)} = \frac{(2n^2 + 9n + 9) - (2n^2 + 9n + 4)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{5}{(n+3)(n+4)} > 0. \end{aligned}$$

Conclusion : (w_n) est strictement croissante.

B3.

1. Soit $P(n)$: « $5^n \geq 4n + 1$ ». *Initialisation*. $5^0 = 1$ et $4 \times 0 + 1 = 1$, donc $P(0)$ est vraie. *Hérédité*. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $5^k \geq 4k + 1$. En multipliant par $5 > 0$: $5^{k+1} \geq 20k + 5$. Or $20k + 5 \geq 4k + 5 = 4(k+1) + 1$ car $16k \geq 0$. Donc $P(k+1)$ est vraie. *Conclusion*. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire : $5^n \geq 4n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $4n + 1 \rightarrow +\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim 5^n = +\infty$.
2. $u_1 = 3 \times 3 - 4 = 5$ et $u_2 = 3 \times 5 - 4 = 11$ (cohérent avec $3^1 + 2 = 5$ et $3^2 + 2 = 11$). Soit $P(n)$: « $u_n = 3^n + 2$ ». *Initialisation*. $3^0 + 2 = 3 = u_0$. *Hérédité*. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 3^k + 2$. Alors $u_{k+1} = 3u_k - 4 = 3(3^k + 2) - 4 = 3^{k+1} + 2$. Donc $P(k+1)$ est vraie. *Conclusion*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + 2$.

B4.

1. $u_n = n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$: le facteur tend vers 1 et $n^2 \rightarrow +\infty$. Par produit, $\lim u_n = +\infty$.
2. $v_n = \frac{n(4 + \frac{1}{n})}{n(2 - \frac{3}{n})} = \frac{4 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n}}$. Par quotient, $\lim v_n = \frac{4}{2} = 2$.
3. $w_n = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{n(1 + \frac{2}{n^3})}$: le numérateur tend vers 1, le dénominateur vers $+\infty$. Par quotient, $\lim w_n = 0$.
4. $x_n = \frac{n^2(3 - \frac{1}{n^2})}{n(1 + \frac{5}{n})} = n \times \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n}}$: le quotient tend vers 3 et $n \rightarrow +\infty$. Par produit, $\lim x_n = +\infty$.
5. $y_n = \frac{-1 + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^3}}$. Par quotient, $\lim y_n = -\frac{1}{2}$.

B5.

1. a) $-1 < 0,8 < 1$ donc $\lim a_n = 0$.
b) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $(\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$; par produit et somme, $\lim b_n = 6$.
c) $1,5 > 1$ donc $1,5^n \rightarrow +\infty$; par somme, $\lim c_n = +\infty$.

d) $-1,2 < -1$: la suite (d_n) change de signe à chaque terme et $|d_n| = 1,2^n \rightarrow +\infty$. Elle n'a pas de limite.

e) $e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$, somme de deux suites de limite 0. Donc $\lim e_n = 0$.

2. S est la somme de 11 termes d'une suite géométrique de raison 3 : $S = \frac{1-3^{11}}{1-3} = \frac{3^{11}-1}{2} = 88\,573$ (car $3^{11} = 177\,147$).

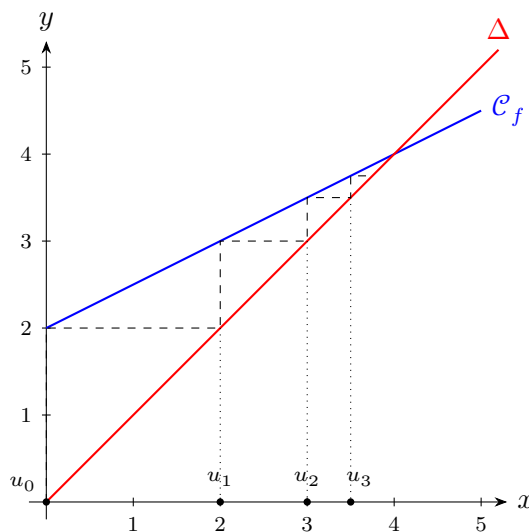
3. $T_n = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{25}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$. Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \rightarrow 0$. **Conclusion :**
 $\lim T_n = \frac{25}{3}$.

B6.

- Pour tout n , $\cos n \geq -1$, donc $u_n \geq n^2 - 5$. Or $n^2 - 5 \rightarrow +\infty$. Par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.
- Pour tout n , $\sin n \leq 1$, donc $v_n \leq -3n + 2$. Or $-3n + 2 \rightarrow -\infty$. Par comparaison, $\lim v_n = -\infty$.
- $0 \leq 2 + \cos n \leq 3$, donc $0 \leq w_n \leq \frac{3}{n^2}$. Comme $\frac{3}{n^2} \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim w_n = 0$.
- $t_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ et $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $3 - \frac{1}{n} \leq t_n \leq 3 + \frac{1}{n}$. Les deux bornes tendent vers 3 : par les gendarmes, $\lim t_n = 3$.

B7.

- $u_1 = 0,5 \times 0 + 2 = 2$, $u_2 = 0,5 \times 2 + 2 = 3$, $u_3 = 0,5 \times 3 + 2 = 3,5$.
- Voir la figure : on part de u_n sur l'axe, on monte jusqu'à $\mathcal{C}_f$, on va horizontalement jusqu'à Δ , puis on redescend sur l'axe.



- Les termes semblent croître et se rapprocher de 4. **Conjecture :** (u_n) est croissante et converge vers 4 (abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et Δ).
- $\ell = 0,5\ell + 2 \iff 0,5\ell = 2 \iff \ell = 4$. C'est l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de Δ : la limite éventuelle de la suite. Cela confirme la conjecture, qui reste à démontrer (la solution de $\ell = f(\ell)$ n'a de sens qu'une fois la convergence établie).

B8.

- Le script calcule la suite définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 4$. Pour **terme(3)** : u vaut 10, puis 9, puis 8,5, puis 8,25. **Conclusion :** **terme(3)** renvoie 8,25, c'est-à-dire u_3 .

2.	n	0	1	2	3	4	5
	u	200	220	242	266,2	292,82	322,102

La boucle s'arrête quand $u \geq 300$: le script renvoie 5, le plus petit entier n tel que $200 \times 1,1^n \geq 300$.

3. On remplace `while u < 300` par `while u < 500`. On a $200 \times 1,1^9 \approx 471,6 < 500$ et $200 \times 1,1^{10} \approx 518,7 \geq 500$. **Le script renvoie 10.**
4. La liste en compréhension contient, dans l'ordre, les valeurs de `terme(k)` pour `k` de 0 à 3.
Conclusion : `L = [10, 9.0, 8.5, 8.25]`, liste des termes u_0, u_1, u_2, u_3 .

B9.

- Vrai.** Si (u_n) est croissante, $u_n \geq u_0$ pour tout n : u_0 est un minorant.
- Vrai.** Pour tout n , $-|u_n| \leq (-1)^n u_n \leq |u_n|$, et $|u_n| \rightarrow 0$ puisque $u_n \rightarrow 0$. Par les gendarmes, $(-1)^n u_n \rightarrow 0$.
- Vrai.** C'est le théorème de convergence des suites monotones (toute suite croissante et majorée converge).
- Faux.** Contre-exemple : $u_n = n(1 + (-1)^n)$. On a $u_{2p} = 4p$ (non majorée) et $u_{2p+1} = 0$. Il y a une infinité de termes égaux à 0, donc pas de limite $+\infty$.
- Faux.** Contre-exemple : $u_n = -n$ et $v_n = 0$. On a $u_n \leq v_n$, (v_n) converge, mais $u_n \rightarrow -\infty$.
- Vrai.** L'intervalle ouvert $\left] \frac{\ell}{2}; \frac{3\ell}{2} \right[$ contient ℓ , donc tous les termes à partir d'un certain rang. Pour ces termes, $u_n > \frac{\ell}{2} > 0$.
- Contraposée :** « si (u_n) ne converge pas, alors (u_n) n'est pas croissante ou n'est pas majorée ». Elle est **vraie**, car équivalente au théorème de convergence monotone. **Réciproque :** « si (u_n) converge, alors (u_n) est croissante et majorée ». Elle est **fausse** : $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 sans être croissante. Pour une suite croissante : majorée $\Rightarrow$ convergente (théorème, condition suffisante) et convergente $\Rightarrow$ bornée donc majorée (condition nécessaire). **Conclusion :** pour une suite croissante, être majorée est une condition nécessaire et suffisante de convergence.

B10.

- $3n - 1 > 10\,000 \iff n > \frac{10\,001}{3} \approx 3333,67 \iff n \geq 3334$. Vérification : $u_{3333} = 9998$ et $u_{3334} = 10\,001$. **Conclusion :** $N = 3334$ ((u_n) est croissante, donc l'inégalité reste vraie pour tout $n \geq 3334$).
- $|v_n - 2| = \frac{3}{n+1} < 0,01 \iff n+1 > 300 \iff n \geq 300$. Vérification : pour $n = 299$, $\frac{3}{300} = 0,01$ n'est pas strictement inférieur à 0,01. **Conclusion :** $N = 300$.
- $|v_n - 2| = \frac{3}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{3}{\varepsilon}$. On prend $N_\varepsilon = \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil$: pour $n \geq N_\varepsilon$, $n+1 > \frac{3}{\varepsilon}$ donc $|v_n - 2| < \varepsilon$. **Conclusion :** tout intervalle $]2-\varepsilon; 2+\varepsilon[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang, donc $\lim v_n = 2$.
- $5 - 2n^2 < -1\,000 \iff n^2 > 502,5 \iff n \geq 23$ (car $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$). Vérification : $w_{22} = -963$ et $w_{23} = -1\,053$. La suite (w_n) est décroissante, donc $w_n < -1\,000$ pour tout $n \geq 23$. **Conclusion :** le même raisonnement vaut pour tout réel B à la place de $-1\,000$: tout intervalle $]-\infty; B]$ contient tous les termes à partir d'un certain rang, donc $\lim w_n = -\infty$.