

Fiche 6 : algorithmique et Python

Sept exercices sur les questions de programmation que l'on retrouve régulièrement dans les exercices de suites du bac : calculer un terme, trouver un seuil, calculer une somme, compléter ou interpréter un script.

Bonne nouvelle : ces questions sont presque toujours des points « cadeaux » si tu connais les trois modèles ci-dessous.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : exécution pas à pas, justification de la valeur renvoyée, justification de la terminaison quand elle est demandée.

Les trois modèles à connaître

1. Calculer le terme u_n (boucle **for) :** on part de u_0 , on applique la relation de récurrence n fois.

```
def terme(n):  
    u = 2  
    for i in range(n):  
        u = 3*u - 1  
    return u
```

2. Trouver un seuil (boucle **while) :** on avance tant que la condition n'est pas atteinte, et on compte les étapes.

```
def seuil():  
    n = 0  
    u = 1000  
    while u < 2000:  
        u = 1.05*u  
        n = n + 1  
    return n
```

3. Calculer une somme : on ajoute chaque terme à une variable qui sert de compteur.

```
def somme(n):  
    u = 1  
    s = 1  
    for i in range(n):  
        u = u/2  
        s = s + u  
    return s
```

Les pièges classiques

- **Le seuil renvoie n , pas u_n .** Relis la question : « le plus petit entier n » veut dire qu'on renvoie le compteur.
- L'ordre des instructions dans la boucle : mettre à jour u *avant* ou *après* $n = n + 1$ ne change pas le résultat ici, mais si u et n se servent l'un de l'autre, ça change tout.
- La condition du **while** est **l'inverse** de ce qu'on cherche : on cherche $u_n \geq A$, donc on boucle tant que $u < A$.
- Confondre $<$ et $\leq$ (ou $>$ et $\geq$) : lis l'énoncé au symbole près.
- **range(n)** répète n fois, avec i qui va de 0 à $n - 1$.

Astuce : exécute le script à la main sur les deux ou trois premières étapes, avec un tableau de valeurs. C'est la méthode qui évite 95 % des erreurs. Un script qui « a l'air juste » n'est pas un script vérifié.

Exercice 1 (★) : que renvoie ce script ?

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$. Que renvoie l'appel **terme(3)** du modèle 1 ci-dessus ?

Exercice 2 (★) : écrire une fonction

On définit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0,5 u_n + 2$. Écrire une fonction Python **terme(n)** qui renvoie u_n , puis calculer **terme(3)** à la main.

Exercice 3 (★★) : un seuil à la baisse

Une machine vaut 5 000 € à l'achat et perd 10 % de sa valeur chaque année. On note u_n sa valeur au bout de n années.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n < 2000$.
3. Quelle valeur renvoie-t-elle ?

Exercice 4 (★★) : une somme et son seuil

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

1. Écrire une fonction Python `somme(n)` qui renvoie S_n . Que renvoie `somme(3)` ?
2. On rappelle que $S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$. Écrire une fonction qui renvoie le plus petit entier n tel que $2 - S_n < 0,01$. Quelle valeur renvoie-t-elle ?

Exercice 5 (★★★) : compléter un script (type bac)

Dans l'exercice du parc animalier (fiche 4, exercice 4), on a $u_0 = 800$ et $u_{n+1} = 0,9 u_n + 60$.

On souhaite savoir à partir de quelle année (n) le parc compte moins de 650 animaux.

Recopier et compléter le script :

```
def annee():
    n = .....
    u = .....
    while .....:
        u = .....
        n = .....
    return n
```

Exercice 6 (★★★) : conjecturer une limite

Reprenons $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$ (fiche 5, exercice 5).

1. Écrire un script Python qui affiche les termes u_1 à u_{10} .
2. Donner les valeurs approchées obtenues et conjecturer la limite.

Exercice 7 (★★★) : pourquoi l'algorithme s'arrête-t-il ?

On définit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Pour un réel A , on considère la fonction :

```
def seuil(A):
    n = 0
    u = 1
    while u <= A:
        u = 2*u + 1
        n = n + 1
    return n
```

1. Que renvoie `seuil(1000)` ? (On admet que $u_n = 2^{n+1} - 1$.)
2. Pourquoi peut-on affirmer que cet algorithme s'arrête pour tout réel A ?

Ce qui peut tomber au bac

- Un script à **exécuter à la main** ou dont on donne la valeur renvoyée (exercices 1, 2, 5).
- Un **seuil** à programmer avec une boucle `while` (exercices 3, 4, 7).
- Une **justification de la terminaison** par une limite (exercices 3, 4, 5 et 7).
- Un script qui **affiche des termes** pour conjecturer une limite (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Dans ``while u < 100:``, la boucle s'arrête quand :
 - A. $u \geq 100$
 - B. $u < 100$
 - C. $u = 100$ exactement
 - D. après 100 tours
2. Avec ``u = 1`` puis ``for k in range(3): u = 2*u + 1``, que vaut ``u`` à la fin ?
 - A. 31
 - B. 9
 - C. 7
 - D. 15
3. Pour $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 0,5 u_n$, quel est le premier rang n tel que $u_n < 1$?
 - A. 7
 - B. 6
 - C. 8
 - D. 100

4. `range(1, n+1)` parcourt :
- A. les entiers de 1 à n
 - B. les entiers de 0 à n
 - C. les entiers de 1 à $n - 1$
 - D. $n + 1$ entiers
5. Une boucle `while` dont la condition ne devient jamais fausse :
- A. tourne indéfiniment
 - B. s'arrête au bout de 100 tours
 - C. provoque une erreur de syntaxe
 - D. renvoie 0
6. Dans l'exercice 1, avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$, que renvoie `terme(3)` ?
- A. 41
 - B. 23
 - C. 17
 - D. 53
7. Dans l'exercice 2, avec $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0,5 u_n + 2$, que renvoie `terme(3)` ?
- A. 2,875
 - B. 4
 - C. 3,875
 - D. 3,5
8. Dans l'exercice 3 (la machine qui perd 10 % de sa valeur par an, $u_0 = 5\,000$), au bout de combien d'années la valeur passe-t-elle sous 2 000 € ?
- A. 5 ans
 - B. 2 000 ans
 - C. 10 ans
 - D. 9 ans
9. Dans l'exercice 4, avec $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$, que renvoie `somme(3)` ?
- A. 0,875
 - B. 1,75
 - C. 2
 - D. 1,875
10. Dans l'exercice 7, avec $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et la fonction `seuil(A)` du script, que renvoie `seuil(1000)` ?
- A. 10

B. 9

C. 1 000

D. 8