

Fiche 5 : suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Sept exercices sur le grand classique du bac : encadrer par récurrence, étudier la monotonie, conclure à la convergence, puis trouver la limite.

Ici, chaque exercice suit la même trame, et c'est justement ce qui rend cette partie « rentable » : quand tu maîtrises la trame, tu ramasses presque tous les points.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : récurrence complète, théorème de convergence nommé, continuité vérifiée, solution parasite éliminée.

La trame à suivre, dans l'ordre

1. **Récurrence** pour prouver un encadrement (par exemple $0 \leq u_n \leq 3$). On utilise la croissance de f pour « passer f de chaque côté ».
2. **Monotonie** : par récurrence, ou avec le signe de $u_{n+1} - u_n$ (souvent en factorisant).
3. **Convergence** : « la suite est croissante et majorée (ou décroissante et minorée), donc elle converge ».
4. **Limite** : on note ℓ la limite, on écrit $\ell = f(\ell)$ (car f est continue), on résout, puis on garde la solution compatible avec l'encadrement.

Les pièges classiques

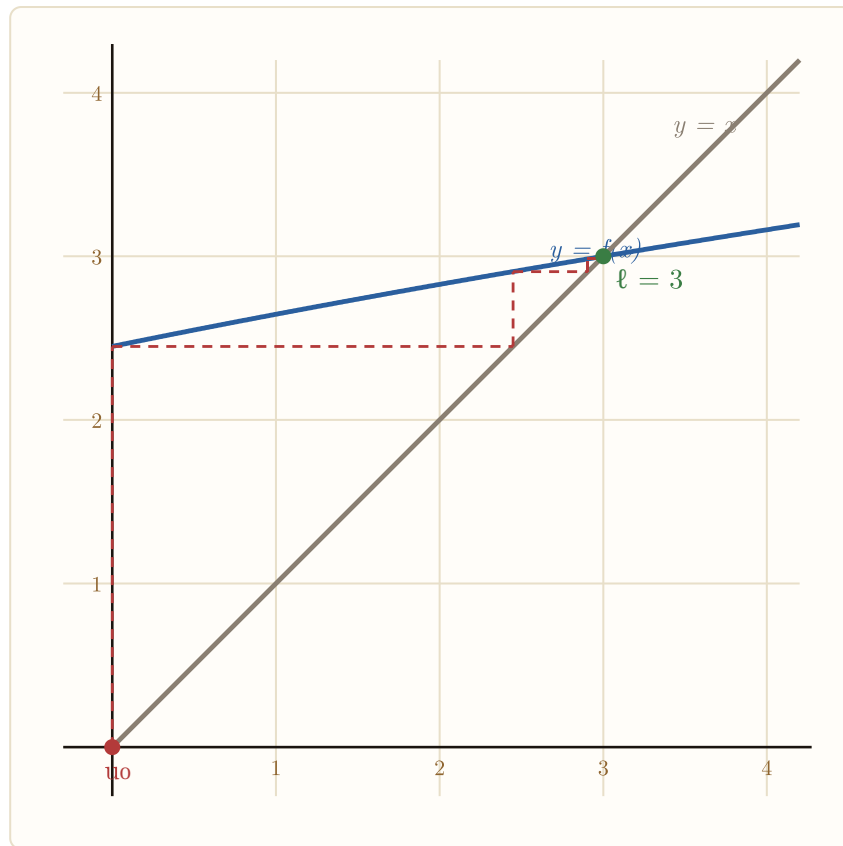
- Écrire $\ell = f(\ell)$ **avant** d'avoir prouvé que la suite converge. C'est interdit : d'abord la convergence, ensuite la limite.
- Garder les deux solutions de l'équation $\ell = f(\ell)$ (souvent une négative, ou hors de l'intervalle).
- Utiliser la croissance de f alors que f est décroissante : les inégalités se retournent.
- Oublier de vérifier que u_n reste dans le domaine de f (positivité sous une racine, dénominateur non nul).
- Confondre $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(n)$.

Poser $\ell = f(\ell)$ sans avoir montré que ça converge, c'est chercher où atterrit un avion qui n'a jamais décollé.

Exercice 1 (★★) : la suite racine carrée, version croissante

On définit $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
2. Démontrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.



$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$: l'escalier monte vers le point fixe $\ell = 3$

Exercice 2 (★★) : une fonction homographique

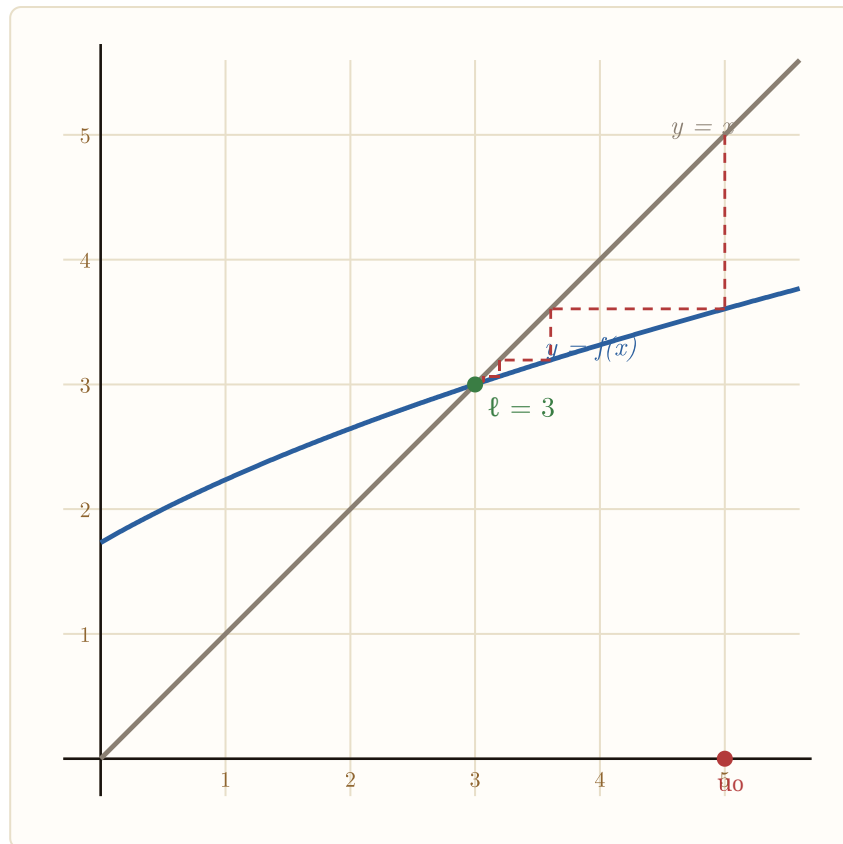
On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 2}$.

1. Montrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Exercice 3 (★★★) : une suite décroissante

On définit $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.



$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$: l'escalier descend vers le point fixe $\ell = 3$

Exercice 4 (★★★) : l'algorithme de Héron

On définit $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Exercice 5 (★★★) : quand f est décroissante

On définit $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 . La suite (u_n) est-elle monotone ?
2. Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ . Déterminer ℓ .

Exercice 6 (★★) : une suite auxiliaire « inverse »

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est arithmétique.
3. En déduire u_n en fonction de n , puis la limite de (u_n) .

Exercice 7 (★★) : exclure une solution grâce au sens de variation

On définit $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Déterminer la limite de (u_n) .

Ce qui peut tomber au bac

- La trame complète **encadrement, monotonie, convergence, limite** avec une racine carrée (exercices 1 et 3) ou une fraction (exercice 2).
- Une suite qui approche un nombre, comme $\sqrt{2}$ (exercice 4).
- Une fonction **décroissante**, où le sujet te dit d'admettre la convergence (exercice 5).
- Une **suite auxiliaire** arithmétique ou géométrique, souvent donnée par l'énoncé (exercice 6).

Si tu maîtrises les exercices 1, 2 et 3, tu as déjà la structure de presque tous les sujets.

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Si (u_n) converge vers ℓ avec $u_{n+1} = f(u_n)$ et f continue, alors ℓ vérifie :
 - A. $\ell = u_0$
 - B. $f(\ell) = \ell$
 - C. $f(\ell) = 0$
 - D. $f'(\ell) = 0$
2. Pour $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ avec $u_n \geq 0$, quelle limite est possible ?
 - A. 4
 - B. 2
 - C. 0

- D. -1
3. Si f est croissante sur I stable par f et si $u_1 \geq u_0$, alors (u_n) est :
- A. constante
 - B. décroissante
 - C. croissante
 - D. alternée
4. Si f est décroissante sur I , la suite $u_{n+1} = f(u_n)$:
- A. n'est en général pas monotone
 - B. est toujours croissante
 - C. est toujours décroissante
 - D. est constante
5. Pour montrer $0 \leq u_n \leq 2$ avec $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, on utilise que $f(x) = \sqrt{x + 2}$ est :
- A. décroissante sur $[0; 2]$
 - B. constante
 - C. croissante sur $[0; 2]$
 - D. paire
6. Dans l'exercice 1, avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$, quelle est la limite de (u_n) ?
- A. $\sqrt{6}$
 - B. 6
 - C. 3
 - D. 0
7. Dans l'exercice 3, avec $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$, la suite (u_n) est :
- A. décroissante et minorée par 3, de limite 3
 - B. décroissante et de limite 0
 - C. croissante et majorée
 - D. constante
8. Dans l'exercice 4 (algorithme de Héron pour $\sqrt{2}$), quelle relation clé permet de montrer que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n ?
- A. $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$
 - B. $u_{n+1} - \sqrt{2} = u_n - \sqrt{2}$
 - C. $u_{n+1} = u_n - \sqrt{2}$
 - D. $u_{n+1}^2 = 2u_n$
9. Dans l'exercice 6, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$, en posant $v_n = \frac{1}{u_n}$, quelle est la nature de (v_n) ?

- A. arithmétique de raison 2
 - B. géométrique de raison 1
 - C. arithmétique de raison 1
 - D. constante
10. Dans l'exercice 7, avec $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, quelle est la limite de (u_n) ?
- A. 1
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. $\frac{1}{4}$
 - D. 0