

Fiche 5 : suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Sept exercices sur le grand classique du bac : encadrer par récurrence, étudier la monotonie, conclure à la convergence, puis trouver la limite.

Ici, chaque exercice suit la même trame, et c'est justement ce qui rend cette partie « rentable » : quand tu maîtrises la trame, tu ramasses presque tous les points.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : récurrence complète, théorème de convergence nommé, continuité vérifiée, solution parasite éliminée.

La trame à suivre, dans l'ordre

1. **Récurrence** pour prouver un encadrement (par exemple $0 \leq u_n \leq 3$). On utilise la croissance de f pour « passer f de chaque côté ».
2. **Monotonie** : par récurrence, ou avec le signe de $u_{n+1} - u_n$ (souvent en factorisant).
3. **Convergence** : « la suite est croissante et majorée (ou décroissante et minorée), donc elle converge ».
4. **Limite** : on note ℓ la limite, on écrit $\ell = f(\ell)$ (car f est continue), on résout, puis on garde la solution compatible avec l'encadrement.

Les pièges classiques

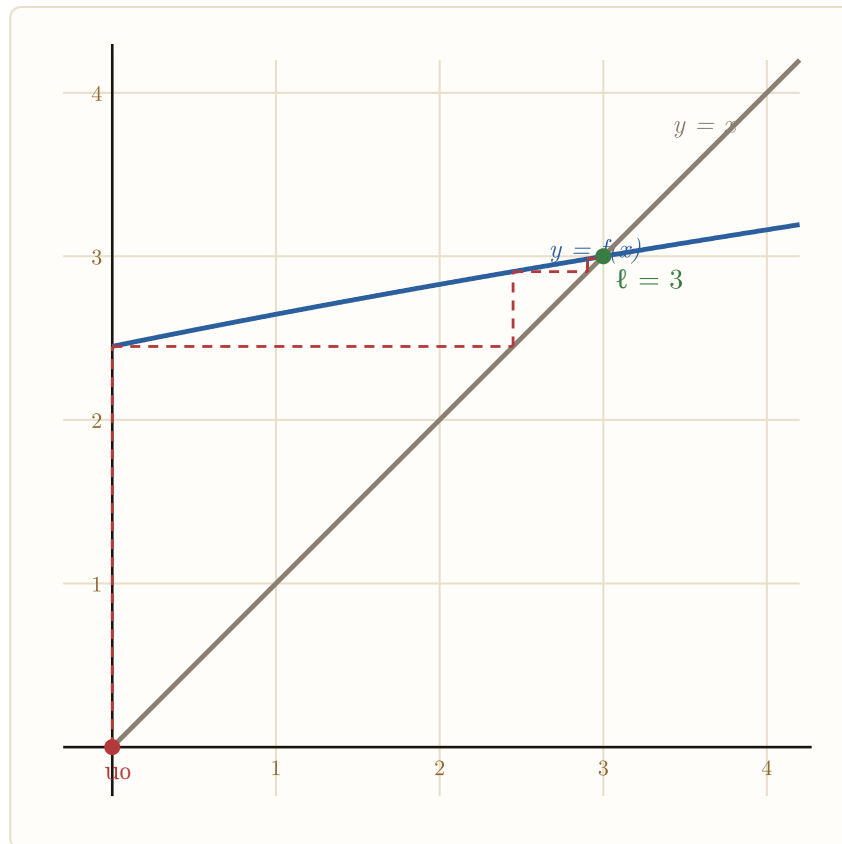
- Écrire $\ell = f(\ell)$ **avant** d'avoir prouvé que la suite converge. C'est interdit : d'abord la convergence, ensuite la limite.
- Garder les deux solutions de l'équation $\ell = f(\ell)$ (souvent une négative, ou hors de l'intervalle).
- Utiliser la croissance de f alors que f est décroissante : les inégalités se retournent.
- Oublier de vérifier que u_n reste dans le domaine de f (positivité sous une racine, dénominateur non nul).
- Confondre $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(n)$.

Poser $\ell = f(\ell)$ sans avoir montré que ça converge, c'est chercher où atterrit un avion qui n'a jamais décollé.

Exercice 1 (★★) : la suite racine carrée, version croissante

On définit $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
2. Démontrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.



$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$: l'escalier monte vers le point fixe $\ell = 3$

Correction de l'exercice 1

Question 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq 3$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 \leq 3$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 \leq u_k \leq 3$ (hypothèse de récurrence).

Alors $6 \leq u_k + 6 \leq 9$, donc $u_k + 6 \geq 0$ et $u_{k+1} = \sqrt{u_k + 6}$ est bien défini.

La racine carrée étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$: $\sqrt{6} \leq u_{k+1} \leq \sqrt{9} = 3$.

Comme $\sqrt{6} \geq 0$, on a $0 \leq u_{k+1} \leq 3$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en multipliant par la quantité conjuguée (strictement positive car $\sqrt{u_n + 6} > 0$ et $u_n \geq 0$) :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 6} - u_n = \frac{(u_n + 6) - u_n^2}{\sqrt{u_n + 6} + u_n}$$

Or $(u_n + 6) - u_n^2 = -(u_n^2 - u_n - 6) = -(u_n - 3)(u_n + 2) = (3 - u_n)(u_n + 2)$. D'après la question 1, $3 - u_n \geq 0$ et $u_n + 2 > 0$, donc le numérateur est positif, et le dénominateur est

strictement positif. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$:

la suite (u_n) est croissante.

Question 3

La suite (u_n) est croissante et majorée par 3. D'après le théorème de convergence monotone : **elle converge vers un réel ℓ** , avec $0 \leq \ell \leq 3$ (passage à la limite dans l'encadrement de la question 1).

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+6}$ est continue sur $[0; 3]$, et $\ell \in [0; 3]$.

En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$, soit $\ell = \sqrt{\ell+6}$.

Comme $\ell \geq 0$, cela entraîne $\ell^2 = \ell + 6$, soit $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, c'est-à-dire $(\ell - 3)(\ell + 2) = 0$.

Donc $\ell = 3$ ou $\ell = -2$.

Comme $\ell \geq 0$, $\ell = -2$ est exclu.

Donc $\lim u_n = 3$.

Astuce : pour la monotonie, tu peux aussi faire une récurrence : $u_0 \leq u_1$, puis « si $u_k \leq u_{k+1}$ alors, la racine étant croissante, $\sqrt{u_k+6} \leq \sqrt{u_{k+1}+6}$ ».

Exercice 2 (★★) : une fonction homographique

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 2}$.

1. Montrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Correction de l'exercice 2

Question 1

La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur $x + 2$ ne s'annule pas. Pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x+2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Question 2

Soit $P(n)$ la propriété : « $1 \leq u_n \leq 2$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $1 \leq u_k \leq 2$ (hypothèse de récurrence). Comme f est croissante sur $[0; +\infty[$, $f(1) \leq f(u_k) \leq f(2)$, c'est-à-dire $\frac{5}{3} \leq u_{k+1} \leq \frac{8}{4} = 2$. Comme $1 \leq \frac{5}{3}$, on a $1 \leq u_{k+1} \leq 2$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2} = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 2}$$

D'après la question 2, $2 - u_n \geq 0$, et $u_n + 1 > 0$, $u_n + 2 > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$:

(u_n) est croissante.

Question 4

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone : **elle converge vers un réel ℓ , avec $1 \leq \ell \leq 2$.**

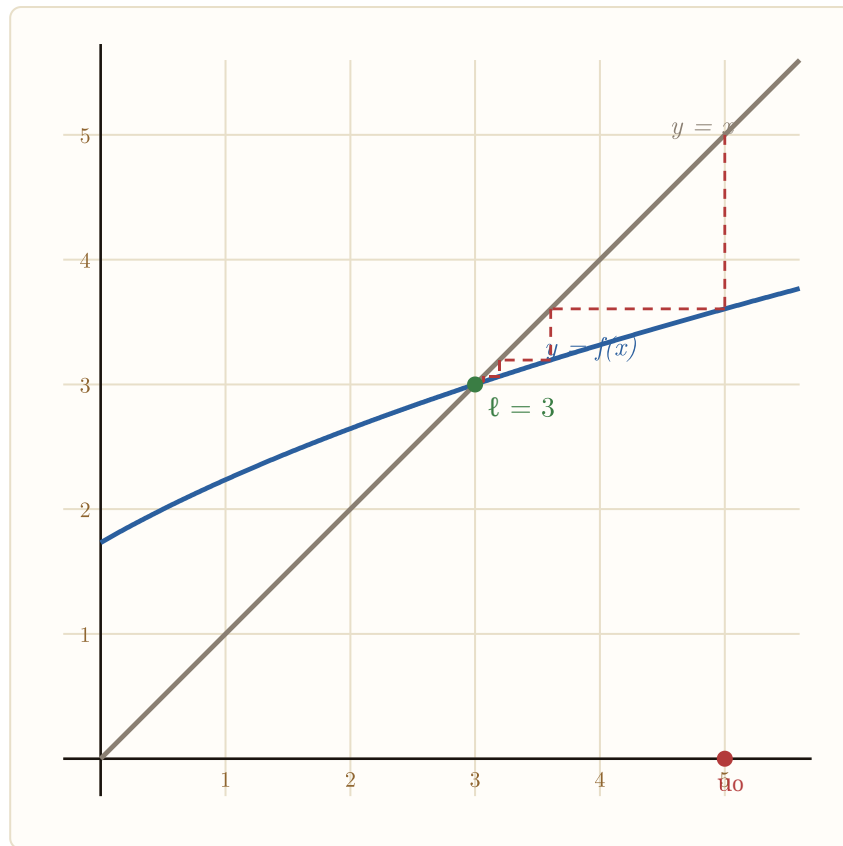
La fonction f est continue sur $[1; 2]$ (dérivable), et $\ell \in [1; 2]$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, $\ell = \frac{3\ell + 2}{\ell + 2}$, donc $\ell(\ell + 2) = 3\ell + 2$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, c'est-à-dire $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 1$, $\ell = -1$ est exclu.

Donc $\lim u_n = 2$.

Exercice 3 (★★★) : une suite décroissante

On définit $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.


 $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$: l'escalier descend vers le point fixe $\ell = 3$

Correction de l'exercice 3

Question 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $u_n \geq 3$ ».

Initialisation. $u_0 = 5 \geq 3$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_k \geq 3$ (hypothèse de récurrence). Alors $2u_k + 3 \geq 9 > 0$, donc $u_{k+1} = \sqrt{2u_k + 3}$ est bien défini, et, la racine carrée étant croissante sur $[0; +\infty[$, $u_{k+1} \geq \sqrt{9} = 3$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $u_n \geq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (quantité conjuguée strictement positive) :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{(2u_n + 3) - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

Or $(2u_n + 3) - u_n^2 = -(u_n^2 - 2u_n - 3) = -(u_n - 3)(u_n + 1)$. D'après la question 1, $u_n - 3 \geq 0$ et $u_n + 1 > 0$, donc le numérateur est négatif ou nul, et le dénominateur est strictement positif. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$:

la suite (u_n) est décroissante.

Question 3

La suite (u_n) est décroissante et minorée par **3**. D'après le théorème de convergence monotone :

elle converge vers un réel ℓ , avec $\ell \geq 3$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est continue sur $[3; +\infty[$, et $\ell \in [3; +\infty[$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}$, $\ell = \sqrt{2\ell+3}$. Cela entraîne $\ell^2 = 2\ell+3$, soit $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, c'est-à-dire $(\ell-3)(\ell+1) = 0$. Comme $\ell \geq 3$, $\ell = -1$ est exclu.

Donc $\lim u_n = 3$.

Piège évité : ici la suite décroît vers **3** : le nombre **3** est un **minorant**, pas un majorant. Regarde bien le sens.

Exercice 4 (★★★) : l'algorithme de Héron

On définit $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Correction de l'exercice 4

Question 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $u_n > 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 2 > 0$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_k > 0$. Alors $\frac{2}{u_k} > 0$, donc $u_k + \frac{2}{u_k} > 0$ et $u_{k+1} > 0$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion.

$u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la suite est bien définie).

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$$

Ce quotient est positif (un carré divisé par $2u_n > 0$). Donc $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme de plus $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$:

$u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{u_n} - u_n \right) = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$$

D'après la question 2, $u_n \geq \sqrt{2} > 0$, donc $u_n^2 \geq 2$ et $2 - u_n^2 \leq 0$. Comme $2u_n > 0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$:

la suite (u_n) est décroissante.

Question 4

La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. D'après le théorème de convergence monotone :

elle converge vers un réel ℓ , avec $\ell \geq \sqrt{2} > 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ est continue sur $[\sqrt{2}; +\infty[$, et $\ell \in [\sqrt{2}; +\infty[$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$, $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right)$, donc $2\ell = \ell + \frac{2}{\ell}$, soit $\ell = \frac{2}{\ell}$, donc $\ell^2 = 2$.

Comme $\ell > 0$:

$$\lim u_n = \sqrt{2}$$

Pour info : $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_2 = \frac{17}{12} \approx 1,41667$. En deux étapes, on approche $\sqrt{2} \approx 1,41421$ à 0,003 près.

Exercice 5 (★★★) : quand f est décroissante

On définit $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 . La suite (u_n) est-elle monotone ?
2. Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ . Déterminer ℓ .

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$u_1 = \frac{1}{1+0} = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}, u_4 = \frac{1}{5/3} = \frac{3}{5}.$$

On a $u_0 < u_1$, puis $u_1 > u_2$, puis $u_2 < u_3$.

La suite n'est pas monotone.

Question 2

Soit $P(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 \leq 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 \leq u_k \leq 1$ (hypothèse de récurrence).

Alors $1 \leq 1 + u_k \leq 2$.

La fonction inverse est **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$: elle retourne les inégalités.

Donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + u_k} \leq 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq 1$.

En particulier $0 \leq u_{k+1} \leq 1$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 3

On admet que (u_n) converge vers ℓ , avec $0 \leq \ell \leq 1$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0; 1]$, et $\ell \in [0; 1]$.

En passant à la limite, $\ell = \frac{1}{1+\ell}$, donc $\ell(1+\ell) = 1$, soit $\ell^2 + \ell - 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 5$, donc $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Comme $\ell \geq 0$, la seconde solution est exclue.

Donc $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

À retenir : quand f est décroissante, la suite n'est pas monotone. Le bac dit alors « on admet que (u_n) converge » et te demande seulement la limite.

Exercice 6 (★★) : une suite auxiliaire « inverse »

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est arithmétique.

3. En déduire u_n en fonction de n , puis la limite de (u_n) .

Correction de l'exercice 6

Question 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $u_n > 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 1 > 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_k > 0$. Alors $1 + u_k > 0$ et $u_{k+1} = \frac{u_k}{1 + u_k} > 0$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion.

$u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $v_n = \frac{1}{u_n}$ est bien défini.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1 + u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 1 = v_n + 1$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$.

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times 1 = n + 1$.

$$u_n = \frac{1}{n + 1}$$

Comme $n + 1 \rightarrow +\infty$, par quotient :

$$\lim u_n = 0$$

Exercice 7 (★★) : exclure une solution grâce au sens de variation

On définit $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Déterminer la limite de (u_n) .

Correction de l'exercice 7

Question 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = \frac{1}{4} \in [0; 1]$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 \leq u_k \leq 1$. La racine carrée étant croissante sur $[0; +\infty[$, $0 \leq \sqrt{u_k} \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq u_{k+1} \leq 1 : P(k+1)$ est vraie.

Conclusion.

$0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n} (1 - \sqrt{u_n})$$

D'après la question 1, $0 \leq u_n \leq 1$, donc $0 \leq \sqrt{u_n} \leq 1$: les deux facteurs sont positifs. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$:

(u_n) est croissante.

Question 3

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1.

D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ , avec $\ell \leq 1$.

Comme (u_n) est croissante, $\ell \geq u_0 = \frac{1}{4} > 0$.

La fonction racine carrée est continue sur $[0; 1]$, et $\ell \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $\ell = \sqrt{\ell}$, donc $\ell^2 = \ell$, soit $\ell(\ell - 1) = 0$: $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Comme $\ell \geq \frac{1}{4}$, $\ell = 0$ est exclu.

Donc $\lim u_n = 1$.

Astuce : une suite croissante ne peut pas avoir une limite plus petite que son premier terme. C'est une manière très propre d'éliminer une solution.

Ce qui peut tomber au bac

- La trame complète **encadrement, monotonie, convergence, limite** avec une racine carrée (exercices 1 et 3) ou une fraction (exercice 2).
- Une suite qui approche un nombre, comme $\sqrt{2}$ (exercice 4).
- Une fonction **décroissante**, où le sujet te dit d'admettre la convergence (exercice 5).
- Une **suite auxiliaire** arithmétique ou géométrique, souvent donnée par l'énoncé (exercice 6).

Si tu maîtrises les exercices 1, 2 et 3, tu as déjà la structure de presque tous les sujets.

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Si (u_n) converge vers ℓ avec $u_{n+1} = f(u_n)$ et f continue, alors ℓ vérifie :

- A. $\ell = u_0$
- B. $f(\ell) = \ell$ (**bonne réponse**)
- C. $f(\ell) = 0$
- D. $f'(\ell) = 0$

Justification : On passe à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ en utilisant la continuité de f .

2. Pour $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ avec $u_n \geq 0$, quelle limite est possible ?

- A. 4
- B. 2 (**bonne réponse**)
- C. 0
- D. -1

Justification : $\ell = \sqrt{\ell + 2} \iff \ell^2 = \ell + 2 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 2$.

3. Si f est croissante sur I stable par f et si $u_1 \geq u_0$, alors (u_n) est :

- A. constante
- B. décroissante
- C. **croissante (bonne réponse)**
- D. alternée

Justification : Par récurrence : $u_{n+1} \geq u_n$ entraîne $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

4. Si f est décroissante sur I , la suite $u_{n+1} = f(u_n)$:

- A. **n'est en général pas monotone (bonne réponse)**
- B. est toujours croissante
- C. est toujours décroissante
- D. est constante

Justification : Avec f décroissante, l'ordre des termes s'inverse à chaque étape : les termes pairs et impairs varient en sens contraire.

5. Pour montrer $0 \leq u_n \leq 2$ avec $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, on utilise que $f(x) = \sqrt{x + 2}$ est :

- A. décroissante sur $[0; 2]$
- B. constante
- C. **croissante sur $[0; 2]$ (bonne réponse)**
- D. paire

Justification : Si $0 \leq u_k \leq 2$, alors $\sqrt{2} \leq u_{k+1} \leq 2$, donc $0 \leq u_{k+1} \leq 2$.

6. Dans l'exercice 1, avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$, quelle est la limite de (u_n) ?

- A. $\sqrt{6}$
- B. 6
- C. **3 (bonne réponse)**

D. 0

Justification : (u_n) est croissante et majorée par 3 : elle converge vers ℓ tel que $\ell = \sqrt{\ell + 6}$, donc $\ell = 3$.

7. Dans l'exercice 3, avec $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$, la suite (u_n) est :

A. **décroissante et minorée par 3, de limite 3 (bonne réponse)**

B. décroissante et de limite 0

C. croissante et majorée

D. constante

Justification : $u_n \geq 3$ pour tout n (récurrence), et la suite est décroissante ; elle converge vers $\ell \geq 3$ tel que $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$, donc $\ell = 3$.

8. Dans l'exercice 4 (algorithme de Héron pour $\sqrt{2}$), quelle relation clé permet de montrer que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n ?

A. $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$ **(bonne réponse)**

B. $u_{n+1} - \sqrt{2} = u_n - \sqrt{2}$

C. $u_{n+1} = u_n - \sqrt{2}$

D. $u_{n+1}^2 = 2u_n$

Justification : Le membre de droite est le quotient d'un carré par un nombre positif : il est positif ou nul, donc $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

9. Dans l'exercice 6, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$, en posant $v_n = \frac{1}{u_n}$, quelle est la nature de (v_n) ?

A. arithmétique de raison 2

B. géométrique de raison 1

C. **arithmétique de raison 1 (bonne réponse)**

D. constante

Justification : $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1 + u_n}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n} = v_n + 1$: la différence est constante, égale à 1.

10. Dans l'exercice 7, avec $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, quelle est la limite de (u_n) ?

A. **1 (bonne réponse)**

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. 0

Justification : (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle converge vers ℓ tel que $\ell = \sqrt{\ell}$, avec $\ell \geq u_0 > 0$, donc $\ell = 1$ (on exclut $\ell = 0$ par le sens de variation).