

Fiche 4 : suites arithmético-géométriques

Huit exercices sur les suites du type $u_{n+1} = a u_n + b$, les suites « auxiliaires » et les problèmes de modélisation (population, placement, évolution en pourcentage).

C'est un classique du bac : le sujet te donne presque toujours la suite auxiliaire, à toi de la traiter proprement.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : calcul de v_{n+1} écrit en entier, raison et premier terme énoncés, conclusion.

La méthode en cinq étapes

1. **Trouve le point fixe ℓ** en résolvant $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \frac{b}{1-a}$ (avec $a \neq 1$).
2. **Pose $v_n = u_n - \ell$** (ou utilise la suite auxiliaire donnée par l'énoncé).
3. **Montre que (v_n) est géométrique** de raison a : $v_{n+1} = a u_n + b - \ell = a(u_n - \ell) = a v_n$.
4. **Écris $v_n = v_0 \times a^n$, puis $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$.**
5. **Conclus sur la limite** : si $-1 < a < 1$, $u_n \rightarrow \ell$. Si $a > 1$, la suite diverge.

Les pièges classiques

- Se tromper de raison : la raison de (v_n) est a , pas ℓ , pas b .
- Oublier de calculer v_0 : $v_0 = u_0 - \ell$, pas u_0 .
- Un signe faux dans $v_n = u_n - \ell$ (ou $u_n + \ell$) : vérifie en calculant v_1 à la main.
- Traduire mal l'énoncé : « baisse de 10 % » se traduit par « $\times 0,9$ », « augmente de 5 % » par « $\times 1,05$ ».
- Dire que la suite converge alors que $a > 1$.

Astuce : calcule toujours u_1 à la main, puis vérifie ta formule finale avec $n = 1$. Si elle ne colle pas, tu as trouvé ton erreur avant le correcteur.

Exercice 1 (★) : le cas standard

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5 u_n + 3$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique.
2. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
3. Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 2 (★★) : une raison supérieure à 1

On définit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Trouver le nombre ℓ tel que $\ell = 3\ell - 4$, puis exprimer u_n en fonction de n et étudier sa limite.

Exercice 3 (★★) : une raison négative

On définit $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = -0,5 u_n + 6$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Déterminer la limite de (u_n) .
3. La suite (u_n) est-elle monotone ?

Exercice 4 (★★) : évolution d'une population

Un parc animalier compte 800 animaux au 1er janvier 2026.

Chaque année, 10 % des animaux quittent le parc, et 60 nouveaux animaux arrivent.

On note u_n le nombre d'animaux au 1er janvier de l'année $2026 + n$, donc $u_0 = 800$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0,9 u_n + 60$.
2. On pose $v_n = u_n - 600$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de (u_n) et l'interpréter.
5. À partir de quelle année le parc compte-t-il moins de 650 animaux ?

Exercice 5 (★★) : un placement avec versements

Léa place 1 000 € à intérêts composés au taux de 5 % par an.

Chaque année, juste après le calcul des intérêts, elle ajoute 100 €.

On note u_n le capital, en euros, au bout de n années, avec $u_0 = 1000$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 1,05 u_n + 100$.
2. On pose $v_n = u_n + 2000$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. Exprimer u_n en fonction de n , puis déterminer la limite de (u_n) .
4. Au bout de combien d'années Léa dépasse-t-elle 5 000 € ?

Exercice 6 (★★★) : une suite auxiliaire avec « n »

On définit $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$. On pose $v_n = u_n - n$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
3. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
4. Déterminer la limite de (u_n) .
5. Étudier le sens de variation de (u_n) .

Exercice 7 (★★★) : une suite homographique

On définit $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
2. On pose $w_n = \frac{1}{u_n} - 1$. Montrer que (w_n) est géométrique.
3. En déduire u_n en fonction de n , puis la limite de (u_n) .

Exercice 8 (★★) : le sens de variation dépend de u_0

On considère $u_{n+1} = 0,8u_n + 4$, avec un premier terme u_0 quelconque.

1. Montrer que $u_n = 20 + (u_0 - 20) \times 0,8^n$.
2. Étudier le sens de variation de (u_n) selon la valeur de u_0 (avec $u_0 < 20$, $u_0 = 20$ ou $u_0 > 20$).
3. Que peut-on dire de la limite ?

Ce qui peut tomber au bac

- Une suite $u_{n+1} = a u_n + b$ avec une suite auxiliaire donnée (exercices 1 à 3, 5).
- Un **problème de modélisation** avec pourcentages et ajouts (exercices 4 et 5).
- Une suite auxiliaire qui **dépend de n** (exercice 6) ou qui utilise **l'inverse** (exercice 7).
- Un **seuil** à trouver à la calculatrice ou avec Python (exercices 4 et 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Pour $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$, quel réel ℓ vérifie $\ell = 0,5\ell + 3$?

- A. 6
 - B. 3
 - C. 0,5
 - D. 12
2. Avec $\ell = 6$, la suite $v_n = u_n - 6$ est :
- A. géométrique de raison 0,5
 - B. arithmétique de raison 3
 - C. constante
 - D. géométrique de raison 6
3. Avec $u_0 = 10$, on a $u_n = 6 + 4 \times 0,5^n$. Quelle est la limite de (u_n) ?
- A. 6
 - B. 10
 - C. 0
 - D. $+\infty$
4. Pour $u_{n+1} = 3u_n - 4$, quel réel ℓ vérifie $\ell = 3\ell - 4$?
- A. $\frac{1}{2}$
 - B. -2
 - C. 4
 - D. 2
5. Pour $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$, on trouve $u_n = 2 + 3^{n+1}$. Quelle est la limite ?
- A. $+\infty$
 - B. 2
 - C. 5
 - D. 0
6. Dans l'exercice 1, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$, quelle est la raison de la suite auxiliaire $v_n = u_n - 6$?
- A. 0,5
 - B. 3
 - C. -5
 - D. 6
7. Dans l'exercice 2, avec $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$, quelle est la limite de (u_n) ?
- A. 2
 - B. 5
 - C. 0

D. $+\infty$

8. Dans l'exercice 4 (le parc animalier), quelle est la limite du nombre d'animaux u_n ?

A. $+\infty$

B. 600

C. 800

D. 60

9. Dans l'exercice 5 (le placement de Léa), au bout de combien d'années son capital dépasse-t-il 5 000 € ?

A. 18 ans

B. 100 ans

C. 5 ans

D. 10 ans

10. Dans l'exercice 7 (suite homographique), avec $w_n = \frac{1}{u_n} - 1$, quelle est la limite de (u_n) ?

A. $+\infty$

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1