

Fiche 4 : suites arithmético-géométriques

Huit exercices sur les suites du type $u_{n+1} = a u_n + b$, les suites « auxiliaires » et les problèmes de modélisation (population, placement, évolution en pourcentage).

C'est un classique du bac : le sujet te donne presque toujours la suite auxiliaire, à toi de la traiter proprement.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : calcul de v_{n+1} écrit en entier, raison et premier terme énoncés, conclusion.

La méthode en cinq étapes

1. **Trouve le point fixe ℓ** en résolvant $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \frac{b}{1-a}$ (avec $a \neq 1$).
2. **Pose $v_n = u_n - \ell$** (ou utilise la suite auxiliaire donnée par l'énoncé).
3. **Montre que (v_n) est géométrique** de raison a : $v_{n+1} = a u_n + b - \ell = a(u_n - \ell) = a v_n$.
4. **Écris $v_n = v_0 \times a^n$, puis $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$.**
5. **Conclus sur la limite** : si $-1 < a < 1$, $u_n \rightarrow \ell$. Si $a > 1$, la suite diverge.

Les pièges classiques

- Se tromper de raison : la raison de (v_n) est a , pas ℓ , pas b .
- Oublier de calculer v_0 : $v_0 = u_0 - \ell$, pas u_0 .
- Un signe faux dans $v_n = u_n - \ell$ (ou $u_n + \ell$) : vérifie en calculant v_1 à la main.
- Traduire mal l'énoncé : « baisse de 10 % » se traduit par « $\times 0,9$ », « augmente de 5 % » par « $\times 1,05$ ».
- Dire que la suite converge alors que $a > 1$.

Astuce : calcule toujours u_1 à la main, puis vérifie ta formule finale avec $n = 1$. Si elle ne colle pas, tu as trouvé ton erreur avant le correcteur.

Exercice 1 (★) : le cas standard

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5 u_n + 3$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique.
2. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
3. Déterminer la limite de (u_n) .

Correction de l'exercice 1

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5 u_n + 3 - 6 = 0,5 u_n - 3 = 0,5(u_n - 6) = 0,5 v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,5^n = -5 \times 0,5^n$. Comme $u_n = v_n + 6$:

$$u_n = 6 - 5 \times 0,5^n$$

Question 3

Comme $-1 < 0,5 < 1$, $0,5^n \rightarrow 0$. Par produit puis par somme :

$$\lim u_n = 6$$

Vérification : $u_1 = 0,5 \times 1 + 3 = 3,5$ et $6 - 5 \times 0,5 = 3,5$

Exercice 2 (★★) : une raison supérieure à 1

On définit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Trouver le nombre ℓ tel que $\ell = 3\ell - 4$, puis exprimer u_n en fonction de n et étudier sa limite.

Correction de l'exercice 2**Le point fixe**

L'équation $\ell = 3\ell - 4$ équivaut à $2\ell = 4$, donc $\ell = 2$. On pose $v_n = u_n - 2$.

La suite auxiliaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 5 - 2 = 3$.

L'expression de u_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$.

$$u_n = 2 + 3^{n+1}$$

La limite

Comme $3 > 1$, $3^{n+1} \rightarrow +\infty$. Par somme :

$$\lim u_n = +\infty$$

Ici la raison est supérieure à 1 : la suite diverge.

Vérification : $u_1 = 3 \times 5 - 4 = 11$ et $2 + 3^2 = 11$

Exercice 3 (★★) : une raison négative

On définit $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = -0,5 u_n + 6$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Déterminer la limite de (u_n) .
3. La suite (u_n) est-elle monotone ?

Correction de l'exercice 3

Question 1

L'équation $\ell = -0,5\ell + 6$ équivaut à $1,5\ell = 6$, donc $\ell = 4$. On pose $v_n = u_n - 4$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = -0,5 u_n + 6 - 4 = -0,5 u_n + 2 = -0,5(u_n - 4) = -0,5 v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-0,5$ et de premier terme $v_0 = 10 - 4 = 6$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 6 \times (-0,5)^n$, donc :

$$u_n = 4 + 6 \times (-0,5)^n$$

Question 2

Comme $-1 < -0,5 < 1$, $(-0,5)^n \rightarrow 0$. Par produit et par somme :

$$\lim u_n = 4$$

Question 3

On a $u_0 = 10$, $u_1 = -0,5 \times 10 + 6 = 1$ et $u_2 = -0,5 \times 1 + 6 = 5,5$. Comme $u_1 < u_0$ et $u_1 < u_2$, la suite n'est ni croissante ni décroissante :

elle n'est pas monotone.

Elle converge pourtant : la raison négative fait osciller la suite autour de sa limite.

Exercice 4 (★★) : évolution d'une population

Un parc animalier compte 800 animaux au 1er janvier 2026.

Chaque année, 10 % des animaux quittent le parc, et 60 nouveaux animaux arrivent.

On note u_n le nombre d'animaux au 1er janvier de l'année $2026 + n$, donc $u_0 = 800$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0,9 u_n + 60$.
2. On pose $v_n = u_n - 600$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de (u_n) et l'interpréter.
5. À partir de quelle année le parc compte-t-il moins de 650 animaux ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

Si 10 % des animaux quittent le parc, il en reste 90 %, soit $0,9 u_n$. On ajoute les 60 arrivées.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9 u_n + 60$.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 600 = 0,9 u_n + 60 - 600 = 0,9 u_n - 540 = 0,9(u_n - 600) = 0,9 v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = 800 - 600 = 200$.

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 200 \times 0,9^n$.

$$u_n = 600 + 200 \times 0,9^n$$

Question 4

Comme $-1 < 0,9 < 1$, $0,9^n \rightarrow 0$. Par produit et par somme :

$$\lim u_n = 600$$

Interprétation : à long terme, le nombre d'animaux se stabilise autour de 600.

Question 5

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n < 650$, c'est-à-dire $200 \times 0,9^n < 50$, soit $0,9^n < 0,25$. La suite $(0,9^n)$ est strictement décroissante. À la calculatrice :

$$0,9^{13} \approx 0,254 \geq 0,25$$

$$0,9^{14} \approx 0,229 < 0,25$$

Donc $n = 14$.

C'est en $2026 + 14 = 2040$ que le parc compte moins de 650 animaux.

Exercice 5 (★★) : un placement avec versements

Léa place 1 000 € à intérêts composés au taux de 5 % par an.

Chaque année, juste après le calcul des intérêts, elle ajoute 100 €.

On note u_n le capital, en euros, au bout de n années, avec $u_0 = 1000$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 1,05 u_n + 100$.
2. On pose $v_n = u_n + 2000$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. Exprimer u_n en fonction de n , puis déterminer la limite de (u_n) .
4. Au bout de combien d'années Léa dépasse-t-elle 5 000 € ?

Correction de l'exercice 5

Question 1

Une augmentation de 5 % correspond à une multiplication par 1,05. On ajoute ensuite 100 €.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,05 u_n + 100$.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2000 = 1,05 u_n + 100 + 2000 = 1,05 u_n + 2100 = 1,05(u_n + 2000) = 1,05 v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 1,05 et de premier terme $v_0 = 1000 + 2000 = 3000$.

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3000 \times 1,05^n$.

$$u_n = 3000 \times 1,05^n - 2000$$

Comme $1,05 > 1$, $1,05^n \rightarrow +\infty$. Par produit et par somme :

$$\lim u_n = +\infty$$

Question 4

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \geq 5000$, soit $1,05^n \geq \frac{7000}{3000} \approx 2,333$. La suite $(1,05^n)$ est strictement croissante. À la calculatrice :

$$1,05^{17} \approx 2,292 < 2,333$$

$$1,05^{18} \approx 2,407 \geq 2,333$$

Donc $n = 18$.

Léa dépasse 5 000 € au bout de 18 ans.

Astuce : le nombre -2000 vient de $\ell = \frac{100}{1 - 1,05} = -2000$. Quand la raison est supérieure à 1, ℓ n'est plus une limite, mais il reste utile pour poser v_n .

Exercice 6 (★★★) : une suite auxiliaire avec « n »

On définit $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$. On pose $v_n = u_n - n$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
3. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
4. Déterminer la limite de (u_n) .
5. Étudier le sens de variation de (u_n) .

Correction de l'exercice 6

Question 1

$$u_1 = \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{7}{3}$$

$$u_2 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + \frac{1}{3} \times 1 + 1 = \frac{14}{9} + \frac{3}{9} + \frac{9}{9} = \frac{26}{9}$$

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{n}{3} + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$u_n = n + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Vérification : $u_1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$ et $u_2 = 2 + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$

Question 4

Pour tout n , $\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$, donc $u_n \geq n$. Comme $\lim n = +\infty$, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim u_n = +\infty$$

Question 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - n - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} - 1\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

Comme $0 < \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < 1$, cette différence est strictement positive.

La suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 7 (★★★) : une suite homographique

On définit $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
2. On pose $w_n = \frac{1}{u_n} - 1$. Montrer que (w_n) est géométrique.
3. En déduire u_n en fonction de n , puis la limite de (u_n) .

Correction de l'exercice 7

Question 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $0 < u_n < 1$ ».

Initialisation. $u_0 = \frac{1}{2}$, donc $0 < u_0 < 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 < u_k < 1$ (hypothèse de récurrence). Alors $u_k + 1 > 0$, donc $u_{k+1} = \frac{2u_k}{u_k + 1}$ est bien défini et strictement positif. De plus, comme $u_k + 1 > 0$:

$$u_{k+1} < 1 \iff 2u_k < u_k + 1 \iff u_k < 1$$

ce qui est vrai par hypothèse de récurrence. Donc $0 < u_{k+1} < 1$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En particulier, $u_n \neq 0$, donc w_n est bien défini.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{u_n + 1}{2u_n} - 1 = \frac{u_n + 1 - 2u_n}{2u_n} = \frac{1 - u_n}{2u_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right) = \frac{1}{2} w_n$$

Donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = 2 - 1 = 1$.

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Donc $\frac{1}{u_n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$u_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2^n}{2^n + 1}$$

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$. Par somme et quotient :

$\lim u_n = 1$

$$\text{Vérification : } u_1 = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ et } \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

Exercice 8 (★★) : le sens de variation dépend de u_0

On considère $u_{n+1} = 0,8 u_n + 4$, avec un premier terme u_0 quelconque.

1. Montrer que $u_n = 20 + (u_0 - 20) \times 0,8^n$.
2. Étudier le sens de variation de (u_n) selon la valeur de u_0 (avec $u_0 < 20$, $u_0 = 20$ ou $u_0 > 20$).
3. Que peut-on dire de la limite ?

Correction de l'exercice 8

Question 1

L'équation $\ell = 0,8\ell + 4$ équivaut à $0,2\ell = 4$, donc $\ell = 20$. On pose $v_n = u_n - 20$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = 0,8 u_n + 4 - 20 = 0,8 u_n - 16 = 0,8(u_n - 20) = 0,8 v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$, donc $v_n = v_0 \times 0,8^n = (u_0 - 20) \times 0,8^n$.

$$u_n = 20 + (u_0 - 20) \times 0,8^n$$

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (u_0 - 20) \times 0,8^n \times (0,8 - 1) = -0,2 \times (u_0 - 20) \times 0,8^n$$

Comme $0,8^n > 0$, le signe de cette différence est celui de $-(u_0 - 20)$:

- si $u_0 < 20$, $u_{n+1} - u_n > 0$:

(u_n) est strictement croissante.

- si $u_0 = 20$, $u_{n+1} - u_n = 0$:

(u_n) est constante.

- si $u_0 > 20$, $u_{n+1} - u_n < 0$:

(u_n) est strictement décroissante.

Question 3

Comme $-1 < 0,8 < 1$, $0,8^n \rightarrow 0$. Par produit et par somme :

$\lim u_n = 20$ dans tous les cas.

Ce qui peut tomber au bac

- Une suite $u_{n+1} = a u_n + b$ avec une suite auxiliaire donnée (exercices 1 à 3, 5).
- Un **problème de modélisation** avec pourcentages et ajouts (exercices 4 et 5).
- Une suite auxiliaire qui **dépend de n** (exercice 6) ou qui utilise **l'inverse** (exercice 7).
- Un **seuil** à trouver à la calculatrice ou avec Python (exercices 4 et 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Pour $u_{n+1} = 0,5 u_n + 3$, quel réel ℓ vérifie $\ell = 0,5 \ell + 3$?

- A. 6 (bonne réponse)
- B. 3
- C. 0,5
- D. 12

Justification : $\ell - 0,5 \ell = 3 \iff 0,5 \ell = 3 \iff \ell = 6$.

2. Avec $\ell = 6$, la suite $v_n = u_n - 6$ est :

- A. géométrique de raison 0,5 (bonne réponse)
- B. arithmétique de raison 3
- C. constante
- D. géométrique de raison 6

Justification : $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5 u_n + 3 - 6 = 0,5 u_n - 3 = 0,5 (u_n - 6) = 0,5 v_n$.

3. Avec $u_0 = 10$, on a $u_n = 6 + 4 \times 0,5^n$. Quelle est la limite de (u_n) ?

A. 6 (bonne réponse)

B. 10

C. 0

D. $+\infty$

Justification : $0,5^n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 6$.

4. Pour $u_{n+1} = 3u_n - 4$, quel réel ℓ vérifie $\ell = 3\ell - 4$?

A. $\frac{1}{2}$

B. -2

C. 4

D. 2 (bonne réponse)

Justification : $\ell = 3\ell - 4 \iff 2\ell = 4 \iff \ell = 2$.

5. Pour $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$, on trouve $u_n = 2 + 3^{n+1}$. Quelle est la limite ?

A. $+\infty$ (bonne réponse)

B. 2

C. 5

D. 0

Justification : $3^{n+1} \rightarrow +\infty$ car la raison $3 > 1$.

6. Dans l'exercice 1, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5 u_n + 3$, quelle est la raison de la suite auxiliaire $v_n = u_n - 6$?

A. 0,5 (bonne réponse)

B. 3

C. -5

D. 6

Justification : $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5 u_n + 3 - 6 = 0,5(u_n - 6) = 0,5 v_n$.

7. Dans l'exercice 2, avec $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$, quelle est la limite de (u_n) ?

A. 2

B. 5

C. 0

D. $+\infty$ (bonne réponse)

Justification : $u_n = 2 + 3^{n+1}$ et la raison $3 > 1$: la suite diverge vers $+\infty$.

8. Dans l'exercice 4 (le parc animalier), quelle est la limite du nombre d'animaux u_n ?

A. $+\infty$

B. 600 (**bonne réponse**)

C. 800

D. 60

Justification : $u_n = 600 + 200 \times 0,9^n$ et $0,9^n \rightarrow 0$: la population se stabilise vers 600.

9. Dans l'exercice 5 (le placement de Léa), au bout de combien d'années son capital dépasse-t-il 5 000 € ?

A. 18 ans (**bonne réponse**)

B. 100 ans

C. 5 ans

D. 10 ans

Justification : Avec $u_n = 3\,000 \times 1,05^n - 2\,000$, on trouve que Léa dépasse 5 000 € au bout de 18 ans.

10. Dans l'exercice 7 (suite homographique), avec $w_n = \frac{1}{u_n} - 1$, quelle est la limite de (u_n) ?

A. $+\infty$

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1 (**bonne réponse**)

Justification : (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc $w_n \rightarrow 0$, donc $u_n = \frac{1}{1 + w_n} \rightarrow 1$.