

Fiche 3 : comparaison et convergence

Huit exercices sur les outils qui servent quand le calcul direct ne suffit pas : comparer, encadrer, montrer qu'une suite converge sans connaître sa limite. Dans toute la fiche, les limites sont prises quand $n \rightarrow +\infty$.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : inégalité écrite avec son rang, théorème nommé, hypothèses vérifiées.

Quel outil choisir ?

- **Ta suite contient un sinus, un cosinus ou un $(-1)^n$** : encadre-le avec $-1 \leq \dots \leq 1$, puis utilise la comparaison ou les gendarmes.
- **Tu veux montrer que $u_n \rightarrow +\infty$** : trouve une suite plus petite qui tend vers $+\infty$ (une *minoration*).
- **Tu veux montrer que $u_n \rightarrow -\infty$** : trouve une suite plus grande qui tend vers $-\infty$ (une *majoration*).
- **Tu veux une limite finie ℓ** : encadre par deux suites qui tendent toutes les deux vers ℓ (les gendarmes).
- **La suite est monotone et tu ne sais pas calculer la limite** : utilise le théorème de convergence monotone.

Les pièges classiques

- Pour montrer $+\infty$, une *majoration* ne sert à rien : $u_n \leq n + 1$ ne dit pas que $u_n \rightarrow +\infty$.
- Les gendarmes exigent la **même limite** pour les deux suites qui encadrent.
- Une suite croissante et majorée converge, mais pas forcément vers son majorant.
- « Bornée » ne veut pas dire « convergente ».
- Oublier de préciser « à partir d'un certain rang » quand l'encadrement ne vaut que pour $n \geq 1$, par exemple.

Les gendarmes, eux, ne laissent jamais passer un suspect qui n'est pas coincé entre deux suites de même limite.

Exercice 1 (★) : montrer qu'une suite tend vers $+\infty$

1. $u_n = n^2 + 3 \sin n$

2. $v_n = 2n + (-1)^n$

Correction de l'exercice 1

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin n \geq -1$, donc $3 \sin n \geq -3$ et $u_n \geq n^2 - 3$. Or $\lim(n^2 - 3) = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison :

$$\lim u_n = +\infty$$

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geq -1$, donc $v_n \geq 2n - 1$. Or $\lim(2n - 1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison :

$$\lim v_n = +\infty$$

Astuce : on **minore** pour montrer $+\infty$. On remplace le terme gênant $(\sin n, (-1)^n)$ par sa pire valeur.

Exercice 2 (★★) : montrer qu'une suite tend vers $-\infty$

1. $w_n = -n - \cos n$

2. $x_n = -n^2 + 2(-1)^n$

Correction de l'exercice 2

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos n \geq -1$, donc $-\cos n \leq 1$ et $w_n \leq -n + 1$. Or $\lim(-n + 1) = -\infty$.

D'après le théorème de comparaison :

$$\lim w_n = -\infty$$

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \leq 1$, donc $2(-1)^n \leq 2$ et $x_n \leq -n^2 + 2$. Or $\lim(-n^2 + 2) = -\infty$.

D'après le théorème de comparaison :

$$\lim x_n = -\infty$$

Astuce : ici on **major**e, car on veut montrer que la suite descend vers $-\infty$.

Exercice 3 (★★) : le théorème des gendarmes

Déterminer la limite de chaque suite ($n \geq 1$) :

1. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

2. $b_n = \frac{\sin n}{n+1}$

3. $c_n = \frac{n + (-1)^n}{n+1}$

Correction de l'exercice 3

Question 1

Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. En divisant par $n > 0$: $-\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$. Or $\lim \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim a_n = 0$$

Question 2

Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq \sin n \leq 1$. En divisant par $n+1 > 0$: $-\frac{1}{n+1} \leq b_n \leq \frac{1}{n+1}$. Or $\lim \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \lim \frac{1}{n+1} = 0$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim b_n = 0$$

Question 3

Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $n-1 \leq n + (-1)^n \leq n+1$. En divisant par $n+1 > 0$:

$$\frac{n-1}{n+1} \leq c_n \leq \frac{n+1}{n+1} = 1$$

On a $\frac{n-1}{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$, qui tend vers 1 par quotient. Les deux suites qui encadrent (c_n) tendent vers 1. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim c_n = 1$$

Rédaction : écris toujours les trois éléments : l'encadrement (avec son rang), les deux limites égales, la conclusion « d'après le théorème des gendarmes ».

Exercice 4 (★★★) : une somme encadrée

Pour $n \geq 1$, on pose $d_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$. Cette somme contient n termes.

Déterminer la limite de (d_n) .

Correction de l'exercice 4**Chaque terme est encadré**

Soit $n \geq 1$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Alors $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, tous ces nombres étant strictement positifs. Donc :

$$\frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

La somme est encadrée

En additionnant ces inégalités pour k allant de 1 à n (n termes) :

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq d_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

Les limites

$$\frac{n}{n^2 + n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

$$\frac{n}{n^2 + 1} = \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \text{ avec } n + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty, \text{ donc } \frac{n}{n^2 + 1} \rightarrow 0.$$

Les deux suites qui encadrent (d_n) tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim d_n = 0$$

Astuce : pour encadrer une somme de n termes, majore chaque terme par le plus grand, minore-le par le plus petit, puis multiplie par n .

Exercice 5 (★★★) : une somme qui diverge

Pour $n \geq 1$, on pose $e_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Montrer que $e_n \rightarrow +\infty$.

Correction de l'exercice 5

Soit $n \geq 1$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Alors $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ (la racine carrée est croissante), donc $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

En additionnant ces n inégalités pour k allant de 1 à n :

$$e_n \geq n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Or $\lim \sqrt{n} = +\infty$. D'après le théorème de comparaison :

$$\lim e_n = +\infty$$

À retenir : une somme dont les termes tendent vers 0 peut quand même tendre vers $+\infty$: chaque terme est petit, mais on en ajoute de plus en plus.

Exercice 6 (★★) : convergence d'une suite croissante et majorée

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer que (S_n) est croissante.
2. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
3. En déduire que $S_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$, puis que (S_n) converge.

Correction de l'exercice 6

Question 1

Pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.

La suite (S_n) est strictement croissante.

Question 2

Pour tout entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

Comme $k^2 \geq k(k-1) > 0$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

Donc
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Question 3

Soit $n \geq 2$. En additionnant l'inégalité de la question 2 pour k allant de 2 à n :

$$S_n - 1 = \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

(télescopage). Donc $S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$. Cette inégalité est aussi vraie pour $n = 1$ car $S_1 = 1 \leq 2$.

$S_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$.

La suite (S_n) est croissante (question 1) et majorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone :

(S_n) converge.

Pour info : on peut montrer que sa limite vaut $\frac{\pi^2}{6}$, mais ce n'est pas au programme.

Exercice 7 (★★) : une suite décroissante et minorée

On définit $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Correction de l'exercice 7

Question 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $u_n \geq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 4 \geq 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_k \geq 1$ (hypothèse de récurrence). La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, donc $\sqrt{u_k} \geq \sqrt{1} = 1$, c'est-à-dire $u_{k+1} \geq 1$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en particulier, la suite est bien définie).

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n} (1 - \sqrt{u_n})$$

D'après la question 1, $u_n \geq 1$, donc $\sqrt{u_n} \geq 1$ et $1 - \sqrt{u_n} \leq 0$. Comme $\sqrt{u_n} > 0$, on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite (u_n) est décroissante.

Question 3

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone :

elle converge vers un réel ℓ , avec $\ell \geq 1$ (passage à la limite dans l'inégalité $u_n \geq 1$).

La fonction racine carrée est continue sur $[1; +\infty[$, donc, en passant à la limite dans $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, on obtient $\ell = \sqrt{\ell}$.

Cela entraîne $\ell^2 = \ell$, soit $\ell(\ell - 1) = 0$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.

Comme $\ell \geq 1$, $\ell = 0$ est exclu.

Donc $\lim u_n = 1$.

Astuce : la minoration par 1 sert deux fois : à montrer la décroissance, puis à éliminer la solution $\ell = 0$.

Exercice 8 (★) : repérer les erreurs

Voici quatre raisonnements d'élèves. Dans chaque cas, repère l'erreur et propose un contre-exemple ou une correction.

1. « $u_n = n + \sin n$; $u_n \leq n + 1$ et $n + 1 \rightarrow +\infty$, donc $u_n \rightarrow +\infty$. »
2. « (u_n) est croissante et majorée par 5, donc sa limite est 5. »
3. « (u_n) est bornée, donc elle converge. »
4. « $v_n \leq u_n \leq w_n$, $v_n \rightarrow 0$ et $w_n \rightarrow 1$, donc $u_n \rightarrow 0,5$. »

Correction de l'exercice 8

Raisonnement 1

Une majoration ne permet pas de conclure à $+\infty$: le théorème de comparaison pour $+\infty$ demande une *minoration*. Rédaction correcte : pour tout n , $\sin n \geq -1$, donc $u_n \geq n - 1$, et $\lim(n - 1) = +\infty$; par comparaison, $u_n \rightarrow +\infty$.

Raisonnement 2

Une suite croissante et majorée converge (théorème de convergence monotone), mais sa limite n'est pas forcément le majorant. Contre-exemple : $u_n = 3 - \frac{1}{n+1}$ est croissante, majorée par 5, et sa limite est 3.

Raisonnement 3

Une suite bornée ne converge pas forcément. Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$ est bornée ($-1 \leq u_n \leq 1$) mais ne converge pas.

Raisonnement 4

Le théorème des gendarmes exige que v_n et w_n aient la **même** limite.

Contre-exemple : $u_n = 0$ si n est pair et $u_n = 1$ si n est impair, avec $v_n = 0$ et $w_n = 1$.

On a $v_n \leq u_n \leq w_n$, $v_n \rightarrow 0$ et $w_n \rightarrow 1$, mais (u_n) n'a pas de limite.

Ce qui peut tomber au bac

- Une limite avec un $(-1)^n$, un $\sin n$ ou un $\cos n$ (exercices 1 à 3).
- Un **encadrement** qui sert à trouver la limite d'une suite (exercices 3 et 4).
- Une suite **croissante majorée** ou **décroissante minorée** (exercices 6 et 7), presque toujours dans un exercice avec $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Un **vrai/faux** qui teste les pièges de l'exercice 8.

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Si $u_n \geq n$ pour tout n , quelle est la limite de (u_n) ?

- A. $+\infty$ (**bonne réponse**)
- B. 0
- C. La suite n'a pas de limite
- D. 1

Justification : Théorème de comparaison : $u_n \geq n$ et $n \rightarrow +\infty$ donnent $u_n \rightarrow +\infty$.

2. Quelle est la limite de $\frac{\sin n}{n}$?

- A. 0 (**bonne réponse**)
- B. 1
- C. $+\infty$
- D. La suite n'a pas de limite

Justification : $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$: théorème des gendarmes.

3. Une suite croissante et majorée :

- A. est constante
- B. n'a pas de limite
- C. **converge (bonne réponse)**
- D. diverge vers $+\infty$

Justification : Théorème de convergence monotone : elle converge vers une limite inférieure ou égale à tout majorant.

4. Quelle est la limite de $\frac{n + (-1)^n}{n}$?

- A. $+\infty$
- B. 1 (**bonne réponse**)
- C. 0
- D. La suite n'a pas de limite

Justification : $\frac{n + (-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ et $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ par gendarmes.

5. Une suite croissante et non majorée :

- A. **tend vers $+\infty$ (bonne réponse)**
- B. tend vers 0
- C. n'a pas de limite
- D. converge

Justification : Si elle est croissante et non majorée, elle dépasse tout réel à partir d'un certain rang.

6. Dans l'exercice 3, quelle est la limite de $c_n = \frac{n + (-1)^n}{n + 1}$?

- A. 0
- B. La suite n'a pas de limite
- C. **1 (bonne réponse)**
- D. -1

Justification : $c_n = \frac{n + (-1)^n}{n + 1}$ est encadrée entre $\frac{n - 1}{n + 1}$ et $\frac{n + 1}{n + 1}$, deux suites qui tendent vers 1 : gendarmes.

7. Dans l'exercice 6, quelle inégalité permet de majorer $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$?

- A. $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
- B. $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour $k \geq 2$
- C. $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ **pour $k \geq 2$ (bonne réponse)**
- D. $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k}$

Justification : C'est l'inégalité clé de l'exercice 6, qui permet par télescopage de montrer $S_n \leq 2$.

8. Dans l'exercice 6, on en déduit que la suite (S_n) :

- A. est constante
- B. diverge vers $+\infty$
- C. est décroissante
- D. **est croissante et majorée par 2, donc converge (bonne réponse)**

Justification : Croissante (somme de termes positifs) et majorée par 2 : le théorème de convergence monotone s'applique.

9. Dans l'exercice 7, avec $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, quelle est la limite de (u_n) ?

- A. 4
- B. 0
- C. **2**

D. 1 (bonne réponse)

Justification : (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers $\ell \geq 1$ vérifiant $\ell = \sqrt{\ell}$, donc $\ell = 1$.

10. Dans l'exercice 8, quelle est l'erreur du raisonnement « (u_n) est croissante et majorée par 5, donc sa limite est 5 » ?

A. La suite doit être décroissante pour converger

B. La limite est seulement inférieure ou égale à 5, pas forcément égale à 5 (bonne réponse)

C. Il manque l'hypothèse « minorée »

D. Une suite croissante et majorée ne converge pas toujours

Justification : Le théorème de convergence monotone donne l'existence d'une limite $\ell \leq 5$, sans garantir $\ell = 5$ (contre-exemple : $u_n = 4 - \frac{1}{n}$).