

Fiche 2 : les limites

Dix exercices, des limites « faciles » aux formes indéterminées les plus vicieuses. Dans toute la fiche, les limites sont prises quand $n \rightarrow +\infty$.

Bonne nouvelle : 90 % des limites du bac se règlent avec trois réflexes, et tu vas les répéter jusqu'à ce qu'ils deviennent automatiques.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : transformation écrite, règle nommée, conclusion.

L'ordre de bataille pour toute limite

1. **Repère le terme dominant :** la plus grande puissance de n (ou la plus grande base pour les q^n).
2. **Regarde si la limite est directe.** Si oui, applique les règles et conclus.
3. **Si c'est une forme indéterminée** ($+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$), on transforme : on factorise par le terme dominant, on multiplie par la quantité conjuguée, ou on divise par la plus grande puissance.
4. **Conclus en nommant ce que tu utilises :** « par somme », « par produit », « par quotient ».

Les pièges classiques

- Écrire « $+\infty - \infty = 0$ ». Non : c'est une forme indéterminée, il faut transformer l'écriture.
- Traiter $\frac{1}{u_n}$ comme « $\frac{1}{0} = +\infty$ » sans regarder le signe de u_n .
- Oublier qu'une suite alternée comme $(-2)^n$ n'a pas de limite.
- Écrire « $\frac{n}{n} \rightarrow +\infty$ » parce qu'il y a du « ∞ ». Ici $\frac{n}{n} = 1$.
- Une limite avec une racine : ne jamais écrire $\sqrt{\infty - \infty}$ sans conjuguer.

Un « $\infty - \infty$ » qu'on ne transforme pas, c'est comme un exercice sans conclusion : il manque quelque chose, et le correcteur le voit.

Exercice 1 (★) : polynômes

Déterminer la limite de chaque suite :

1. $u_n = 3n^2 - 5n + 2$

2. $v_n = -2n^3 + n$

3. $w_n = n - \sqrt{n}$

4. $x_n = 5 + \frac{1}{n^2}$

Exercice 2 (★) : fractions rationnelles

1. $u_n = \frac{3n + 1}{n + 4}$

2. $v_n = \frac{2n^2 + n}{n^3 + 1}$

3. $w_n = \frac{n^3 - 1}{2n^2 + 3}$

4. $x_n = \frac{-4n^2 + 1}{n^2 - n}$

Exercice 3 (★★) : les racines carrées

1. $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

2. $v_n = \sqrt{n + 3} - \sqrt{n - 1}$, pour $n \geq 1$

3. $w_n = \sqrt{4n^2 + n} - 2n$

4. $x_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

Exercice 4 (★★) : les puissances

1. $u_n = 2^n - 5^n$

2. $v_n = \frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$

3. $w_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{4^n}$

4. $x_n = 0,9^n + \frac{1}{n}$

Exercice 5 (★★) : sommes géométriques

Rappel : pour $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

1. $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Déterminer la limite de (S_n) .
2. $T_n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$. Déterminer la limite de (T_n) .

Exercice 6 (★★) : la définition d'une limite infinie

Soit $u_n = n^2 - 3n$. Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 1000$. Que peut-on en déduire pour (u_n) ?

Exercice 7 (★★) : la définition d'une limite finie

Soit $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$.

1. Montrer que $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$.
2. Déterminer un rang à partir duquel $|u_n - 2| < 10^{-3}$.
3. Que peut-on en déduire pour (u_n) ?

Exercice 8 (★★) : le signe du dénominateur

1. $v_n = \frac{n^2+1}{2-n}$, pour $n \geq 3$
2. $w_n = \frac{5n+1}{3-n}$, pour $n \geq 4$

Exercice 9 (★★★) : vrai ou faux, avec justification

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier (par une preuve ou un contre-exemple).

1. Toute suite qui tend vers $+\infty$ est croissante.
2. Toute suite convergente est bornée.
3. Toute suite bornée converge.
4. Si $u_n \rightarrow 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow +\infty$.
5. Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow 0$, alors $u_n v_n \rightarrow 0$.
6. La suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

Exercice 10 (★★★) : le télescope

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Vérifier que, pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. En déduire une expression simple de S_n , puis la limite de (S_n) .

Ce qui peut tomber au bac sur les limites

- Une **limite directe** ou une forme indéterminée avec factorisation (exercices 1, 2, 8).
- Une **quantité conjuguée** (exercice 3).
- Une suite avec des **puissances** ou une **somme géométrique** (exercices 4 et 5).
- La **définition** de la limite, avec un seuil (exercices 6 et 7).
- Un **vrai/faux** en QCM (exercice 9), ou un télescope (exercice 10).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la limite de $n^2 - 3n + 1$ quand $n \rightarrow +\infty$?
 A. $+\infty$
 B. $-\infty$
 C. 0
 D. 1
2. Quelle est la limite de $\frac{3n^2 + 1}{n^2 + 5}$ quand $n \rightarrow +\infty$?

A. 0

B. $\frac{1}{5}$ C. $+\infty$

D. 3

3. Quelle est la limite de $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$?

A. 0

B. $-\infty$

C. La suite n'a pas de limite

D. 1

4. Quelle est la limite de $1,01^n$ quand $n \rightarrow +\infty$?

A. 0

B. 1

C. $+\infty$

D. 1,01

5. La suite $(-2)^n$:

A. tend vers $+\infty$

B. tend vers 0

C. n'a pas de limite

D. tend vers $-\infty$

6. Dans l'exercice 1, quelle est la limite de $v_n = -2n^3 + n$?

A. 1

B. 0

C. $+\infty$ D. $-\infty$

7. Dans l'exercice 3, quelle est la limite de $w_n = \sqrt{4n^2 + n} - 2n$?

A. $\frac{1}{4}$ B. $+\infty$

C. 0

D. 2

8. Dans l'exercice 5, quelle est la limite de $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$?

A. 2

B. $\frac{1}{2}$ C. $+\infty$

D. 1

9. Dans l'exercice 6, pour $u_n = n^2 - 3n$, à partir de quel rang n_0 a-t-on $u_n \geq 1\,000$?
- A. $n_0 = 100$
 - B. $n_0 = 1\,000$
 - C. $n_0 = 30$
 - D. $n_0 = 34$
10. Dans l'exercice 9 (vrai ou faux), l'affirmation « toute suite convergente est bornée » est :
- A. vraie seulement si la suite est croissante
 - B. vraie seulement si la suite est positive
 - C. vraie
 - D. fausse