

Fiche 2 : les limites

Dix exercices, des limites « faciles » aux formes indéterminées les plus vicieuses. Dans toute la fiche, les limites sont prises quand $n \rightarrow +\infty$.

Bonne nouvelle : 90 % des limites du bac se règlent avec trois réflexes, et tu vas les répéter jusqu'à ce qu'ils deviennent automatiques.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : transformation écrite, règle nommée, conclusion.

L'ordre de bataille pour toute limite

1. **Repère le terme dominant :** la plus grande puissance de n (ou la plus grande base pour les q^n).
2. **Regarde si la limite est directe.** Si oui, applique les règles et conclus.
3. **Si c'est une forme indéterminée** ($+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$), on transforme : on factorise par le terme dominant, on multiplie par la quantité conjuguée, ou on divise par la plus grande puissance.
4. **Conclus en nommant ce que tu utilises :** « par somme », « par produit », « par quotient ».

Les pièges classiques

- Écrire « $+\infty - \infty = 0$ ». Non : c'est une forme indéterminée, il faut transformer l'écriture.
- Traiter $\frac{1}{u_n}$ comme « $\frac{1}{0} = +\infty$ » sans regarder le signe de u_n .
- Oublier qu'une suite alternée comme $(-2)^n$ n'a pas de limite.
- Écrire « $\frac{n}{n} \rightarrow +\infty$ » parce qu'il y a du « ∞ ». Ici $\frac{n}{n} = 1$.
- Une limite avec une racine : ne jamais écrire $\sqrt{\infty - \infty}$ sans conjuguer.

Un « $\infty - \infty$ » qu'on ne transforme pas, c'est comme un exercice sans conclusion : il manque quelque chose, et le correcteur le voit.

Exercice 1 (★) : polynômes

Déterminer la limite de chaque suite :

1. $u_n = 3n^2 - 5n + 2$

2. $v_n = -2n^3 + n$

3. $w_n = n - \sqrt{n}$

4. $x_n = 5 + \frac{1}{n^2}$

Correction de l'exercice 1

Question 1

Forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Pour tout $n \geq 1$, $u_n = n^2 \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} \right)$. Comme $\frac{5}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{2}{n^2} \rightarrow 0$, par somme le facteur tend vers 3. Comme $n^2 \rightarrow +\infty$, par produit :

$$\lim u_n = +\infty$$

Question 2

Pour tout $n \geq 1$, $v_n = n^3 \left(-2 + \frac{1}{n^2} \right)$. Comme $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, par somme le facteur tend vers -2. Comme $n^3 \rightarrow +\infty$, par produit :

$$\lim v_n = -\infty$$

Question 3

Forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Pour tout $n \geq 1$, $w_n = n - \sqrt{n} = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$. Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, le facteur tend vers 1. Comme $n \rightarrow +\infty$, par produit :

$$\lim w_n = +\infty$$

Question 4

Comme $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, par somme :

$$\lim x_n = 5$$

Il n'y a pas de forme indéterminée.

À retenir : pour un polynôme, la limite est celle de son terme de plus haut degré.

Exercice 2 (★) : fractions rationnelles

1. $u_n = \frac{3n+1}{n+4}$

2. $v_n = \frac{2n^2+n}{n^3+1}$

3. $w_n = \frac{n^3-1}{2n^2+3}$

4. $x_n = \frac{-4n^2+1}{n^2-n}$

Correction de l'exercice 2

Question 1

Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{n \left(3 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{4}{n} \right)} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n}}$$

Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1 (non nul). Par quotient :

$$\lim u_n = 3$$

Question 2

Pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{n \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)}$$

Le numérateur tend vers 2, et le dénominateur tend vers $+\infty$. Par quotient :

$$\lim v_n = 0$$

Question 3

Pour tout $n \geq 1$:

$$w_n = \frac{n^3 \left(1 - \frac{1}{n^3} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{3}{n^2} \right)} = n \times \frac{1 - \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{3}{n^2}}$$

Le facteur $\frac{1 - \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{3}{n^2}}$ tend vers $\frac{1}{2}$ (quotient), et $n \rightarrow +\infty$. Par produit :

$$\lim w_n = +\infty$$

Question 4

Pour tout $n \geq 2$:

$$x_n = \frac{n^2 \left(-4 + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{-4 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}}$$

Le numérateur tend vers -4 et le dénominateur vers 1 (non nul). Par quotient :

$$\lim x_n = -4$$

Règle utile : degré du numérateur plus petit : limite 0 ; degrés égaux : quotient des coefficients dominants ; degré du numérateur plus grand : $\pm\infty$ (avec la règle des signes).

Exercice 3 (★★) : les racines carrées

$$1. u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$$

$$2. v_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}, \text{ pour } n \geq 1$$

$$3. w_n = \sqrt{4n^2 + n} - 2n$$

$$4. x_n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

Correction de l'exercice 3

Méthode. Dans les quatre cas, on est dans la forme « $+\infty - \infty$ ». On multiplie et on divise par la quantité conjuguée (strictement positive), avec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{(n^2 + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc :

$$\lim u_n = 0$$

Question 2

Pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = \frac{(n+3) - (n-1)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n-1}} = \frac{4}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n-1}}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc :

$$\lim v_n = 0$$

Question 3

Pour tout $n \geq 1$:

$$w_n = \frac{(4n^2 + n) - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}$$

On divise le numérateur et le dénominateur par $n > 0$ (avec $n = \sqrt{n^2}$) :

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2}$$

Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\sqrt{4 + \frac{1}{n}} \rightarrow 2$ par composition. Par somme et quotient :

$$\lim w_n = \frac{1}{4}$$

Question 4

Pour tout $n \geq 1$:

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$ par composition. Par somme et quotient :

$$\lim x_n = \frac{1}{2}$$

Piège évité : $\sqrt{n^2 + n} - n$ ne tend pas vers 0, mais vers $\frac{1}{2}$. Le calcul « $\sqrt{n^2} - n = 0$ » est faux ici.

Exercice 4 (★★) : les puissances

1. $u_n = 2^n - 5^n$

2. $v_n = \frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$

3. $w_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{4^n}$

4. $x_n = 0,9^n + \frac{1}{n}$

Correction de l'exercice 4

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5^n \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n - 1 \right)$. Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\left(\frac{2}{5} \right)^n \rightarrow 0$, donc le facteur tend vers -1 . Comme $5 > 1$, $5^n \rightarrow +\infty$. Par produit :

$$\lim u_n = -\infty$$

Question 2

Pour tout $n \geq 1$, on divise le numérateur et le dénominateur par $3^n \neq 0$:

$$v_n = \frac{1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}$$

Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3} \right)^n \rightarrow 0$. Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 1 (non nul). Par quotient :

$$\lim v_n = 1$$

Question 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = 2 \times \frac{2^n}{4^n} + \frac{3^n}{4^n} = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $-1 < \frac{3}{4} < 1$, $\left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 0$ et $\left(\frac{3}{4} \right)^n \rightarrow 0$. Par produit et par somme :

$$\lim w_n = 0$$

Question 4

Comme $-1 < 0,9 < 1$, $0,9^n \rightarrow 0$, et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Par somme :

$$\lim x_n = 0$$

Astuce : avec des puissances, la plus grande base « écrase » les autres. On factorise par elle, ou on divise par elle.

Exercice 5 (★★) : sommes géométriques

Rappel : pour $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

1. $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$. Déterminer la limite de (S_n) .
2. $T_n = 1 + 3 + 9 + \dots + 3^n$. Déterminer la limite de (T_n) .

Correction de l'exercice 5

Question 1

La somme S_n est celle de $n + 1$ termes d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \neq 1$. Donc :

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$. Par somme :

$$\lim S_n = 2$$

Question 2

La somme T_n est celle de $n + 1$ termes d'une suite géométrique de raison $q = 3 \neq 1$. Donc :

$$T_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Comme $3 > 1$, $3^{n+1} \rightarrow +\infty$. Par somme et produit :

$$\lim T_n = +\infty$$

À retenir : si $|q| < 1$, la somme converge vers $\frac{1}{1-q}$. Sinon ($q \geq 1$), elle diverge.

Exercice 6 (★★) : la définition d'une limite infinie

Soit $u_n = n^2 - 3n$. Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 1000$. Que peut-on en déduire pour (u_n) ?

Correction de l'exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n - 3)$.

Soit $n \geq 34$. Alors $n \geq 34$ et $n - 3 \geq 31$, donc, tous ces nombres étant positifs :

$$u_n = n(n - 3) \geq 34 \times 31 = 1054 \geq 1000$$

Vérification que 34 est le plus petit entier convenable :

$$u_{33} = 33 \times 30 = 990 < 1000$$

$$u_{34} = 34 \times 31 = 1054 \geq 1000$$

On peut donc prendre $n_0 = 34$.

Conclusion. Le même raisonnement fonctionne pour n'importe quel seuil A : à partir d'un certain rang, $u_n \geq A$. C'est la définition de :

$$\lim u_n = +\infty$$

Exercice 7 (★★) : la définition d'une limite finie

$$\text{Soit } u_n = \frac{2n+3}{n+1}.$$

$$1. \text{ Montrer que } u_n = 2 + \frac{1}{n+1}.$$

$$2. \text{ Déterminer un rang à partir duquel } |u_n - 2| < 10^{-3}.$$

$$3. \text{ Que peut-on en déduire pour } (u_n) ?$$

Correction de l'exercice 7

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2 + \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1) + 1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1} = u_n$$

Donc $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| = \frac{1}{n+1}$. On a $\frac{1}{n+1} < 10^{-3} \iff n+1 > 1000 \iff n \geq 1000$ (n est entier).

Donc, pour tout $n \geq 1000$, $|u_n - 2| < 10^{-3}$.

Question 3

Le même raisonnement fonctionne pour n'importe quelle précision $\varepsilon > 0$: dès que $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, $|u_n - 2| < \varepsilon$.

Donc (u_n) converge vers 2.

On le retrouve aussi directement : $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 2$ par somme.

Exercice 8 (★★) : le signe du dénominateur

1. $v_n = \frac{n^2 + 1}{2 - n}$, pour $n \geq 3$

2. $w_n = \frac{5n + 1}{3 - n}$, pour $n \geq 4$

Correction de l'exercice 8

Question 1

Pour tout $n \geq 3$:

$$v_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(\frac{2}{n} - 1\right)} = n \times \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} - 1}$$

Comme $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ et $\frac{2}{n} \rightarrow 0$, le facteur $\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} - 1}$ tend, par quotient, vers $\frac{1}{-1} = -1$. Comme $n \rightarrow +\infty$, par produit :

$$\lim v_n = -\infty$$

Question 2

Pour tout $n \geq 4$:

$$w_n = \frac{n \left(5 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(\frac{3}{n} - 1\right)} = \frac{5 + \frac{1}{n}}{\frac{3}{n} - 1}$$

Le numérateur tend vers 5 et le dénominateur vers -1 (non nul). Par quotient :

$$\lim w_n = -5$$

Piège évité : le dénominateur $2 - n$ est négatif pour $n \geq 3$. Le signe change tout : ici la limite est $-\infty$, pas $+\infty$. Écris toujours le signe du dénominateur.

Exercice 9 (★★★) : vrai ou faux, avec justification

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier (par une preuve ou un contre-exemple).

1. Toute suite qui tend vers $+\infty$ est croissante.
2. Toute suite convergente est bornée.
3. Toute suite bornée converge.
4. Si $u_n \rightarrow 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow +\infty$.
5. Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow 0$, alors $u_n v_n \rightarrow 0$.
6. La suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

Correction de l'exercice 9

Affirmation 1

Contre-exemple : $u_n = n + (-1)^n$. On a $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 3$: comme $u_1 < u_0$, la suite n'est pas croissante. Pourtant, pour tout n , $(-1)^n \geq -1$, donc $u_n \geq n - 1$, et par comparaison $u_n \rightarrow +\infty$.

Faux.

Affirmation 2

Soit (u_n) convergente vers ℓ .

Il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \in]\ell - 1; \ell + 1[$.

Les termes $u_0, \dots, u_{N-1}$ sont en nombre fini : soit M le plus grand des nombres $|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1$.

Alors $|u_n| \leq M$ pour tout n : la suite est bornée.

Vrai.

Affirmation 3

Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$ vérifie $-1 \leq u_n \leq 1$, mais ne converge pas (affirmation 6).

Faux.

Affirmation 4

Contre-exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0 (gendarmes), mais $\frac{1}{u_n} = (-1)^n n$ n'a pas de limite.

Autre contre-exemple : $u_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{u_n} = -n \rightarrow -\infty$. Tout dépend du signe.

Faux.

Affirmation 5

C'est une forme indéterminée « $\infty \times 0$ ». Contre-exemple : $u_n = n \rightarrow +\infty$ et $v_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, mais $u_n v_n = 1$ pour tout $n \geq 1$, donc $u_n v_n \rightarrow 1$.

Faux.

Affirmation 6

Les termes valent alternativement 1 et -1.

Si la suite convergeait vers ℓ , les termes de rang pair (égaux à 1) donneraient $\ell = 1$ et ceux de rang impair (égaux à -1) donneraient $\ell = -1$: c'est impossible.

La suite n'a donc pas de limite.

Vrai.

Méthode : pour prouver qu'une affirmation est fausse, un seul contre-exemple suffit. Pour prouver qu'elle est vraie, il faut une démonstration.

Exercice 10 (★★★) : le télescopage

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Vérifier que, pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. En déduire une expression simple de S_n , puis la limite de (S_n) .

Correction de l'exercice 10

Question 1

Pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

Question 2

Pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Chaque terme négatif se simplifie avec le terme positif suivant (télescopage) : il ne reste que le premier et le dernier.

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Comme $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, par somme :

$$\lim S_n = 1$$

Ce qui peut tomber au bac sur les limites

- Une **limite directe** ou une forme indéterminée avec factorisation (exercices 1, 2, 8).
- Une **quantité conjuguée** (exercice 3).
- Une suite avec des **puissances** ou une **somme géométrique** (exercices 4 et 5).
- La **définition** de la limite, avec un seuil (exercices 6 et 7).
- Un **vrai/faux** en QCM (exercice 9), ou un télescopage (exercice 10).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la limite de $n^2 - 3n + 1$ quand $n \rightarrow +\infty$?

- A. $+\infty$ (bonne réponse)
- B. $-\infty$
- C. 0
- D. 1

Justification : On factorise : $n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ et $n^2 \rightarrow +\infty$, le facteur tend vers 1.

2. Quelle est la limite de $\frac{3n^2 + 1}{n^2 + 5}$ quand $n \rightarrow +\infty$?

- A. 0
- B. $\frac{1}{5}$
- C. $+\infty$
- D. 3 (bonne réponse)

Justification : On divise par n^2 : $\frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}} \rightarrow 3$.

3. Quelle est la limite de $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$?

- A. 0 (**bonne réponse**)
- B. $-\infty$
- C. La suite n'a pas de limite
- D. 1

Justification : Pour $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$, même si q est négatif.

4. Quelle est la limite de $1,01^n$ quand $n \rightarrow +\infty$?

- A. 0
- B. 1
- C. $+\infty$ (**bonne réponse**)
- D. 1,01

Justification : Pour $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$, même si q est très proche de 1.

5. La suite $(-2)^n$:

- A. tend vers $+\infty$
- B. tend vers 0
- C. **n'a pas de limite (bonne réponse)**
- D. tend vers $-\infty$

Justification : Ses termes alternent de signe avec une valeur absolue qui tend vers $+\infty$: la suite diverge sans limite.

6. Dans l'exercice 1, quelle est la limite de $v_n = -2n^3 + n$?

- A. 1
- B. 0
- C. $+\infty$
- D. $-\infty$ (**bonne réponse**)

Justification : On factorise par n^3 : $v_n = n^3 \left(-2 + \frac{1}{n^2}\right)$, et $n^3 \rightarrow +\infty$ avec un facteur qui tend vers -2 .

7. Dans l'exercice 3, quelle est la limite de $w_n = \sqrt{4n^2 + n} - 2n$?

- A. $\frac{1}{4}$ (**bonne réponse**)
- B. $+\infty$
- C. 0
- D. 2

Justification : On multiplie par la quantité conjuguée : $w_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} \rightarrow \frac{1}{4}$.

8. Dans l'exercice 5, quelle est la limite de $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$?

A. 2 (**bonne réponse**)

B. $\frac{1}{2}$

C. $+\infty$

D. 1

Justification : $S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{1/2} = 2$.

9. Dans l'exercice 6, pour $u_n = n^2 - 3n$, à partir de quel rang n_0 a-t-on $u_n \geq 1\,000$?

A. $n_0 = 100$

B. $n_0 = 1\,000$

C. $n_0 = 30$

D. $n_0 = 34$ (**bonne réponse**)

Justification : On résout $n^2 - 3n \geq 1\,000$: le plus petit entier qui convient est 34 ($34^2 - 3 \times 34 = 1\,054$).

10. Dans l'exercice 9 (vrai ou faux), l'affirmation « toute suite convergente est bornée » est :

A. vraie seulement si la suite est croissante

B. vraie seulement si la suite est positive

C. **vraie (bonne réponse)**

D. fausse

Justification : Une suite convergente vers ℓ a tous ses termes, à partir d'un certain rang, proches de ℓ : elle est bornée.