

Fiche 1 : la récurrence

Huit exercices, du plus doux (★) au plus « bac » (★★★★).

La récurrence, c'est un jeu de dominos : il faut pousser le premier (initialisation) et vérifier que chaque domino fait tomber le suivant (hérédité). Sans le premier, tu obtiens un magnifique alignement de dominos... debout.

Toutes les corrections de cette fiche sont rédigées comme on l'attend au bac.

Le modèle de rédaction à connaître presque par cœur

Soit $P(n)$ la propriété « ... ».

Initialisation : pour $n = n_0, \dots$ Donc $P(n_0)$ est vraie.

Hérédité : soit $k \geq n_0$ un entier fixé tel que $P(k)$ soit vraie (hypothèse de récurrence). Montrons que $P(k+1)$ est vraie. ... (ici, on utilise l'hypothèse de récurrence) ...

Conclusion : $P(n_0)$ est vraie et P est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Les pièges qui coûtent des points

- Écrire « supposons $P(n)$ vraie pour tout n » : c'est exactement ce qu'on veut démontrer. On suppose $P(k)$ pour *un* entier k fixé.
- Oublier l'initialisation, ou la faire au mauvais rang (si la propriété commence à $n = 1$, on n'initialise pas à 0).
- Une hérédité qui n'utilise jamais l'hypothèse de récurrence : ce n'est pas une récurrence.
- Oublier la conclusion. Elle rapporte un point facile, ne le laisse pas au correcteur.
- Dans une inégalité, multiplier par un nombre négatif sans retourner le sens.

Astuce : dans l'hérédité, écris d'abord ce que tu veux obtenir au rang $k+1$ sur un brouillon, puis « fabrique-le » à partir de l'hypothèse. Et pense à factoriser : la clé est presque toujours un facteur $(k+1)$.

Exercice 1 (★) : la somme des entiers

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Correction de l'exercice 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation

Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et le membre de droite vaut $\frac{1 \times 2}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité

Soit $k \geq 1$ un entier fixé tel que $P(k)$ soit vraie : $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $P(k+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

On factorise par $(k+1)$:

$$(k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion

$P(1)$ est vraie et P est héréditaire à partir du rang 1.

Donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 2 (★★) : la somme des carrés

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Correction de l'exercice 2

Soit $P(n)$ la propriété : « $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Initialisation

Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et le membre de droite vaut $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité

Soit $k \geq 1$ un entier fixé tel que $1^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que $P(k+1)$ est vraie.

$$1^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

On factorise par $(k+1)$:

$$(k+1) \times \frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

Or $(k+2)(2k+3) = 2k^2 + 3k + 4k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$. On obtient donc $\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$, c'est-à-dire $\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$. Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion

$P(1)$ est vraie et P est héréditaire à partir du rang 1.

Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 3 (★) : une inégalité avec une puissance

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$.

Correction de l'exercice 3

Soit $P(n)$ la propriété : « $2^n \geq n + 1$ ».

Initialisation

Pour $n = 0$, $2^0 = 1$ et $0 + 1 = 1$. Comme $1 \geq 1$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $2^k \geq k + 1$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $2^{k+1} \geq (k+1) + 1$.

Comme $2 > 0$, on peut multiplier l'hypothèse de récurrence par 2 sans changer le sens de l'inégalité :

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2(k+1) = 2k+2$$

Or $2k+2 \geq k+2$ car $k \geq 0$. Donc $2^{k+1} \geq k+2 = (k+1) + 1$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion

$P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $2^n \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (★★) : trouver puis démontrer une formule explicite

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Vérifier que les valeurs sont cohérentes avec $u_n = 2^{n+2} - 3$, puis démontrer par récurrence que cette formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$$

$$u_2 = 2 \times 5 + 3 = 13$$

$$u_3 = 2 \times 13 + 3 = 29$$

Question 2

Avec la formule : $2^{1+2} - 3 = 5$, $2^{2+2} - 3 = 13$, $2^{3+2} - 3 = 29$. Ces valeurs sont cohérentes.

Soit $P(n)$ la propriété : « $u_n = 2^{n+2} - 3$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$, $2^{0+2} - 3 = 4 - 3 = 1 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_k = 2^{k+2} - 3$ (hypothèse de récurrence). Alors :

$$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+2} - 3) + 3 = 2^{k+3} - 6 + 3 = 2^{k+3} - 3 = 2^{(k+1)+2} - 3$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $u_n = 2^{n+2} - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (★★) : encadrement et monotonie

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Correction de l'exercice 5

Question 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $1 \leq u_n \leq 2$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $1 \leq u_k \leq 2$ (hypothèse de récurrence).

En divisant par 2 : $\frac{1}{2} \leq \frac{u_k}{2} \leq 1$.

En ajoutant 1 : $\frac{3}{2} \leq \frac{u_k}{2} + 1 \leq 2$, c'est-à-dire $\frac{3}{2} \leq u_{k+1} \leq 2$.

Comme $1 \leq \frac{3}{2}$, on en déduit $1 \leq u_{k+1} \leq 2$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + 1 - u_n = 1 - \frac{u_n}{2} = \frac{2 - u_n}{2}$$

D'après la question 1, $u_n \leq 2$, donc $2 - u_n \geq 0$ et $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est croissante.

À retenir : l'encadrement démontré en 1 sert à étudier le signe en 2.

C'est le schéma classique du bac.

On verra dans la fiche 3 que la suite converge, puis que sa limite vaut 2.

Exercice 6 (★★★) : l'inégalité de Bernoulli

Soit a un réel strictement supérieur à -1 .

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
2. En déduire que, si $q > 1$, alors $q^n \rightarrow +\infty$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

Soit $P(n)$ la propriété : « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$, $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $(1 + a)^k \geq 1 + ka$ (hypothèse de récurrence).

Comme $a > -1$, on a $1 + a > 0$: on peut multiplier l'hypothèse de récurrence par $(1 + a)$ sans changer le sens de l'inégalité.

On obtient :

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+a)(1+ka) = 1 + ka + a + ka^2 = 1 + (k+1)a + ka^2$$

Comme $ka^2 \geq 0$, on a $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2

Soit $q > 1$. On pose $a = q - 1 > 0$, donc $a > -1$. D'après la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$q^n = (1+a)^n \geq 1 + n(q-1)$$

Comme $q - 1 > 0$, $\lim (1 + n(q-1)) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

Exercice 7 (★★★) : conjecturer, puis démontrer

On définit $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Correction de l'exercice 7

Question 1

$$u_1 = 0 + 3 = 3$$

$$u_2 = 3 + 5 = 8$$

$$u_3 = 8 + 7 = 15$$

$$u_4 = 15 + 9 = 24$$

Question 2

Les valeurs 3, 8, 15, 24 sont égales à $n^2 + 2n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ ($1 + 2$, $4 + 4$, $9 + 6$, $16 + 8$).

On conjecture que $u_n = n^2 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette conjecture reste à démontrer.

Question 3

Soit $P(n)$ la propriété : « $u_n = n^2 + 2n$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$, $0^2 + 2 \times 0 = 0 = u_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_k = k^2 + 2k$ (hypothèse de récurrence). Alors :

$$u_{k+1} = u_k + 2k + 3 = k^2 + 2k + 2k + 3 = k^2 + 4k + 3$$

Or $(k+1)^2 + 2(k+1) = k^2 + 2k + 1 + 2k + 2 = k^2 + 4k + 3$. Donc $u_{k+1} = (k+1)^2 + 2(k+1) : P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $u_n = n^2 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 (★★) : une divisibilité

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Correction de l'exercice 8

Soit $P(n)$ la propriété : « $4^n - 1$ est divisible par 3 ».

Initialisation

Pour $n = 0$, $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $4^k - 1$ soit divisible par 3. Il existe un entier m tel que $4^k - 1 = 3m$, donc $4^k = 3m + 1$ (hypothèse de récurrence). Alors :

$$4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1 = 4(3m + 1) - 1 = 12m + 3 = 3(4m + 1)$$

avec $4m + 1$ entier. Donc $4^{k+1} - 1$ est divisible par 3 : $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion

$P(0)$ est vraie et P est héréditaire.

Donc $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ce qui peut tomber au bac sur la récurrence

- Une **formule explicite** à démontrer (exercices 4 et 7).
- Un **encadrement** ou une **monotonie** pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ (exercice 5, et la fiche 5).
- Une **inégalité** qui sert à trouver une limite (exercices 3 et 6).
- Plus rarement : une somme ou une divisibilité (exercices 1, 2 et 8).

Si tu sais faire ces huit exercices sans regarder la correction, tu peux passer à la fiche 2.

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Dans une démonstration par récurrence, l'hérédité consiste à montrer que :

- A. pour tout $k \geq n_0$, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie (bonne réponse)
- B. $P(n)$ est vraie pour tout n
- C. $P(n_0)$ est vraie
- D. $P(k+1)$ est vraie sans utiliser $P(k)$

Justification : L'hérédité utilise l'hypothèse de récurrence $P(k)$ pour en déduire $P(k+1)$.

2. Que se passe-t-il si l'on oublie l'initialisation ?

- A. On a prouvé la propriété pour les entiers pairs
- B. On a seulement prouvé $P(0)$
- C. Aucune conséquence, l'hérédité suffit
- D. La conclusion n'est pas démontrée : une propriété héréditaire peut être fausse pour tout n (bonne réponse)

Justification : Sans initialisation, rien n'« accroche » la chaîne. Par exemple « $2^n = 2^n + 1$ » est héréditaire mais toujours fausse.

3. On veut prouver $u_n = 2^{n+1} - 1$ pour $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Dans l'hérédité, on remplace u_k par :

- A. $2^{k+2} - 1$
- B. $2^{k+1} - 1$ (bonne réponse)
- C. $k + 1$
- D. $2^k - 1$

Justification : L'hypothèse de récurrence donne $u_k = 2^{k+1} - 1$, donc $u_{k+1} = 2(2^{k+1} - 1) + 1 = 2^{k+2} - 1$.

4. Que vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ pour $n = 4$?

- A. 8
- B. 10 (bonne réponse)
- C. 20
- D. 12

Justification : $\frac{4 \times 5}{2} = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

5. Pour prouver par récurrence que $3^n \geq 2n + 1$, on part dans l'hérédité de $3^{k+1} = 3 \times 3^k \geq$:

- A. $3(2k+1)$ (bonne réponse)
- B. $2k+1$
- C. 3^k

D. $2k + 3$

Justification : On applique l'hypothèse $3^k \geq 2k + 1 : 3^{k+1} \geq 6k + 3 \geq 2k + 3 = 2(k + 1) + 1$.

6. Dans l'exercice 2 de cette fiche, quelle formule démontre-t-on par récurrence ?

A. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n + 1)}{6}$

B. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)}{2}$

C. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ (bonne réponse)

D. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n^2(n + 1)^2$

Justification : C'est la formule de la somme des carrés des n premiers entiers, prouvée par récurrence dans l'exercice 2.

7. Dans l'exercice 4, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$, que vaut u_2 ?

A. 13 (bonne réponse)

B. 9

C. 11

D. 5

Justification : $u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$ puis $u_2 = 2 \times 5 + 3 = 13$. On vérifie avec la formule démontrée $u_n = 2^{n+2} - 3 : u_2 = 16 - 3 = 13$.

8. Dans l'exercice 6, l'inégalité de Bernoulli $(1 + a)^n \geq 1 + na$ est démontrée par récurrence pour :

A. tout réel $a > -1$ (bonne réponse)

B. tout réel $a < 1$

C. tout réel $a > 0$

D. tout réel a

Justification : L'énoncé de l'exercice 6 fixe a strictement supérieur à -1 : c'est l'hypothèse nécessaire à l'hérédité.

9. Dans l'exercice 7, avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, quelle formule explicite conjecture-t-on puis démontre-t-on ?

A. $u_n = n^2 + 3n$

B. $u_n = n^2 + n$

C. $u_n = n(n + 2)$ (bonne réponse)

D. $u_n = 2n^2$

Justification : Les premiers termes 0,3,8,15,24 correspondent à $n(n + 2) : 0 \times 2 = 0, 1 \times 3 = 3, 2 \times 4 = 8$, etc.

10. Dans l'exercice 8, quel reste obtient-on toujours en divisant $4^n - 1$ par 3 ?

A. Cela dépend de la parité de n

B. 1

C. 2

D. 0 (**bonne réponse**)

Justification : L'exercice démontre par récurrence que $4^n - 1$ est divisible par **3** pour tout entier n : le reste est toujours **0**.