

Contrôle : chapitre 1, Suites

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (7 points) : Limites et comparaison

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 5}$. (1 point)
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$. (1,5 points)
3. Démontrer que la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{3n + 2 \cos n}{n + 1}$ converge et préciser sa limite. (1,5 points)
4. Démontrer par récurrence que, pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$. En déduire que $\lim 1,5^n = +\infty$. (3 points)

Exercice 2 (6 points) : Évolution d'une population de poissons

Dans un étang, la population de poissons est modélisée ainsi : chaque année, elle diminue de 15 % (pêche et mortalité naturelle), puis 90 poissons sont introduits. Au départ, l'étang contient 1 000 poissons. On note u_n le nombre de poissons après n années ; ainsi $u_0 = 1\,000$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,85 u_n + 90$.

```
def seuil(): n = 0 u = 1000 while u _____ : u = _____ n = n + 1 return n
```

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 point)
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 600$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1,5 points)
3. En déduire l'expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n . (1 point)
4. Étudier le sens de variation de (u_n) , puis déterminer sa limite. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé. (1,5 points)
5. Le script Python ci-dessus doit renvoyer le plus petit entier n tel que $u_n < 650$. Recopier et compléter les deux lignes manquantes, puis donner la valeur renvoyée par `seuil()` en justifiant à l'aide des valeurs de u_{12} et u_{13} arrondies au dixième. (1,5 points)

Exercice 3 (7 points) : Une suite récurrente et sa limite

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Vérifier que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$. En déduire que f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Montrer ensuite que $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. (1 point)

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$. (2 points)

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante. (1,5 points)

4. Démontrer que (u_n) converge, puis déterminer sa limite ℓ . (1,5 points)

5. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{3} - u_{n+1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} (\sqrt{3} - u_n)$. En déduire que $\sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{3} - u_n)$. (1 point)