

Contrôle : chapitre 1, Suites

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (7 points) : Limites et comparaison

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 5}$. (1 point)
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$. (1,5 points)
3. Démontrer que la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{3n + 2 \cos n}{n + 1}$ converge et préciser sa limite. (1,5 points)
4. Démontrer par récurrence que, pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$. En déduire que $\lim 1,5^n = +\infty$. (3 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

$$\text{Pour tout } n \geq 1 : u_n = \frac{n^2 \left(4 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{5}{n^2} \right)} = \frac{4 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}}.$$

Comme $\lim \frac{3}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{5}{n^2} = 0$, le numérateur tend vers 4 et le dénominateur vers $2 \neq 0$; par quotient :

$$\lim u_n = 2.$$

Barème : 0,5 point pour la factorisation par le terme dominant n^2 (levée de la forme indéterminée) ; 0,5 point pour les limites des termes et la conclusion par quotient.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1,5 points)

La limite se présente sous la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ » : on multiplie par la quantité conjuguée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{(n+3) - n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}.$$

Comme $\lim \sqrt{n+3} = \lim \sqrt{n} = +\infty$, par somme $\lim (\sqrt{n+3} + \sqrt{n}) = +\infty$; par quotient : $\lim v_n = 0$.

Barème : 0,5 point pour l'identification de la forme indéterminée et l'usage de la quantité conjuguée ; 0,5 point pour le calcul $\frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$; 0,5 point pour la limite du dénominateur et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1,5 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos n \leq 1$ donc $3n - 2 \leq 3n + 2 \cos n \leq 3n + 2$.

Comme $n + 1 > 0$, on divise sans changer le sens des inégalités : $\frac{3n - 2}{n + 1} \leq w_n \leq \frac{3n + 2}{n + 1}$.

Pour $n \geq 1$: $\frac{3n - 2}{n + 1} = \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$ et $\frac{3n + 2}{n + 1} = \frac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$. Ces deux suites tendent vers $\frac{3}{1} = 3$ (par quotient).

D'après le théorème des gendarmes, (w_n) converge et :

$$\lim w_n = 3.$$

Barème : 0,5 point pour l'encadrement de $\cos n$ puis de w_n (avec $n + 1 > 0$) ; 0,5 point pour les limites des deux suites encadrantes ; 0,5 point pour la citation du théorème des gendarmes et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (3 points)

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$: $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \times a$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(k)$ est vraie : $(1 + a)^k \geq 1 + ka$. Comme $1 + a > 0$, on multiplie les deux membres par $1 + a$:

$$(1 + a)^{k+1} \geq (1 + a)(1 + ka) = 1 + ka + a + ka^2 = 1 + (k + 1)a + ka^2.$$

Or $ka^2 \geq 0$, donc $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$: $P(k + 1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Application. Avec $a = 0,5$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1,5^n \geq 1 + 0,5n$. Or $\lim(1 + 0,5n) = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim 1,5^n = +\infty.$$

Barème : 0,5 point pour l'initialisation ; 1 point pour l'hérédité (hypothèse de récurrence utilisée, multiplication par $1 + a > 0$, justification de $ka^2 \geq 0$) ; 0,5 point pour la conclusion de la récurrence ; 1 point pour l'application avec $a = 0,5$ et le théorème de comparaison.

Exercice 2 (6 points) : Évolution d'une population de poissons

Dans un étang, la population de poissons est modélisée ainsi : chaque année, elle diminue de 15 % (pêche et mortalité naturelle), puis 90 poissons sont introduits. Au départ, l'étang contient 1 000 poissons. On note u_n le nombre de poissons après n années ; ainsi $u_0 = 1\,000$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,85u_n + 90$.

```
def seuil(): n = 0 u = 1000 while u _____ : u = _____ n = n + 1 return n
```

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 point)
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 600$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1,5 points)
3. En déduire l'expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n . (1 point)
4. Étudier le sens de variation de (u_n) , puis déterminer sa limite. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé. (1,5 points)
5. Le script Python ci-dessus doit renvoyer le plus petit entier n tel que $u_n < 650$. Recopier et compléter les deux lignes manquantes, puis donner la valeur renvoyée par `seuil()` en justifiant à l'aide des valeurs de u_{12} et u_{13} arrondies au dixième. (1,5 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (0,5 point)

$$u_1 = 0,85 \times 1\,000 + 90 = 940 \text{ et } u_2 = 0,85 \times 940 + 90 = 889.$$

$$u_1 = 940 \text{ et } u_2 = 889.$$

Barème : 0,5 point pour les deux valeurs exactes.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 600 = 0,85 u_n + 90 - 600 = 0,85 u_n - 510 = 0,85 (u_n - 600) = 0,85 v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 600 = 1\,000 - 600 = 400$.

Barème : 1 point pour le calcul de v_{n+1} en fonction de v_n et la raison 0,85 ; 0,5 point pour le premier terme $v_0 = 400$.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1 point)

(v_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme 400 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 400 \times 0,85^n$.

Comme $u_n = v_n + 600$:

$$u_n = 600 + 400 \times 0,85^n.$$

Vérification : $u_1 = 600 + 400 \times 0,85 = 940$, ce qui concorde avec la question 1.

Barème : 0,5 point pour $v_n = 400 \times 0,85^n$; 0,5 point pour $u_n = 600 + 400 \times 0,85^n$.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1,5 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 400 \times 0,85^{n+1} - 400 \times 0,85^n = 400 \times 0,85^n (0,85 - 1) = -60 \times 0,85^n < 0$.

La suite (u_n) est **strictement décroissante**.

Comme $-1 < 0,85 < 1$, $\lim 0,85^n = 0$, donc par produit et somme :

$$\lim u_n = 600.$$

Interprétation : la population de poissons diminue d'année en année et se stabilise à long terme autour de 600 poissons.

Barème : 0,5 point pour le signe de $u_{n+1} - u_n$ et la décroissance ; 0,5 point pour la limite avec la justification $-1 < 0,85 < 1$; 0,5 point pour l'interprétation.

Correction de l'exercice 2, question 5

Question 5 (1,5 points)

Tant que $u \geq 650$, la boucle continue :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1000
    while u >= 650 :
        u = 0.85*u + 90
        n = n + 1
    return n
```

À la calculatrice : $u_{12} = 600 + 400 \times 0,85^{12} \approx 656,9 \geq 650$ et $u_{13} = 600 + 400 \times 0,85^{13} \approx 648,4 < 650$.

Comme (u_n) est décroissante, $u_n \geq 650$ pour $n \leq 12$ et $u_n < 650$ pour $n \geq 13$.

`seuil()` renvoie **13** : c'est au bout de **13** années que la population passe pour la première fois sous **650** poissons.

*Barème : 0,5 point pour la condition $u \geq 650$ et la ligne $u = 0.85*u + 90$; 0,5 point pour les valeurs $u_{12} \approx 656,9$ et $u_{13} \approx 648,4$; 0,5 point pour la valeur renvoyée **13** avec justification (décroissance).*

Exercice 3 (7 points) : Une suite récurrente et sa limite

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Vérifier que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$. En déduire que f est croissante sur $[0; +\infty[$.
Montrer ensuite que $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. (1 point)

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$. (2 points)

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante. (1,5 points)

4. Démontrer que (u_n) converge, puis déterminer sa limite ℓ . (1,5 points)

5. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{3} - u_{n+1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} (\sqrt{3} - u_n)$. En déduire que $\sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{3} - u_n)$. (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1 point)

$$\text{Pour tout } x \geq 0 : 2 - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2) - 1}{x+2} = \frac{2x+3}{x+2} = f(x).$$

La fonction $x \mapsto x + 2$ est croissante et strictement positive sur $[0; +\infty[$, donc $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ y est décroissante, et $f = 2 - \frac{1}{x+2}$ y est croissante.

$$\text{Enfin } f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+2} = \sqrt{3} \text{ car } \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3.$$

Barème : 0,5 point pour la forme $2 - \frac{1}{x+2}$ et la croissance de f ; 0,5 point pour $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (2 points)

Soit $P(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq \sqrt{3}$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 \leq u_k \leq \sqrt{3}$. Comme f est croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient $f(0) \leq f(u_k) \leq f(\sqrt{3})$, c'est-à-dire $\frac{3}{2} \leq u_{k+1} \leq \sqrt{3}$.

A fortiori $0 \leq u_{k+1} \leq \sqrt{3}$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

Barème : 0,5 point pour l'initialisation ; 1 point pour l'hérédité (hypothèse de récurrence, croissance de f , $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$) ; 0,5 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+3}{u_n+2} - u_n = \frac{2u_n+3-u_n(u_n+2)}{u_n+2} = \frac{3-u_n^2}{u_n+2}.$$

D'après la question 2, $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$, donc $u_n^2 \leq 3$ et $3 - u_n^2 \geq 0$; de plus $u_n + 2 > 0$.

Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$: la suite (u_n) est **croissante**.

Barème : 0,5 point pour le calcul de $u_{n+1} - u_n$; 0,5 point pour l'étude du signe grâce à l'encadrement ; 0,5 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1,5 points)

La suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$: d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ .

Pour tout n , $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$, donc par passage à la limite $0 \leq \ell \leq \sqrt{3}$.

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $\ell = f(\ell)$.

$$\ell = \frac{2\ell + 3}{\ell + 2} \iff \ell^2 + 2\ell = 2\ell + 3 \iff \ell^2 = 3 \iff \ell = \sqrt{3} \text{ ou } \ell = -\sqrt{3}.$$

Comme $\ell \geq 0$:

$$\ell = \sqrt{3}.$$

Barème : 0,5 point pour la convergence (théorème nommé, hypothèses croissante et majorée) ; 0,5 point pour l'équation $\ell = f(\ell)$ avec la continuité de f ; 0,5 point pour la résolution et l'élimination de $-\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (1 point)

Comme $1 < \sqrt{3} < 2$, on a $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$. De plus $u_n \geq 0$ donc $u_n + 2 \geq 2$ et $\frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi $0 < \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2}$. Comme $\sqrt{3} - u_n \geq 0$ (question 2), on multiplie :

$$\sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{3} - u_n).$$

Barème : 0,5 point pour l'encadrement $0 < \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2}$; 0,5 point pour la multiplication par $\sqrt{3} - u_n \geq 0$ et la conclusion.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	7
Exercice 2	6
Exercice 3	7
Total	20