

Probabilités conditionnelles et indépendance : le cours

Un test médical est positif : **quelle est la probabilité d'être vraiment malade ?** Beaucoup de gens répondent « presque 100 % ». La vraie réponse est souvent bien plus faible, et ce chapitre t'apprend à la calculer.

Tu vas manipuler des **probabilités conditionnelles**, des **arbres pondérés**, la **formule des probabilités totales**, la notion d'**indépendance**, la **succession d'épreuves indépendantes** et les **épreuves de Bernoulli** (arbres de 2 à 4 épreuves).

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Retiens le fil rouge : **sur un arbre, on multiplie le long d'un chemin et on additionne entre chemins.**
- Avant de calculer, **écris les événements avec des lettres** et traduis chaque phrase de l'énoncé en probabilité.

1. Probabilité conditionnelle

Définition. Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On la note aussi $P(B | A)$. On en déduit $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Pour comprendre : savoir que A est réalisé, c'est **restreindre l'univers à A** . On regarde alors la part de B dans A .

Exemple (tableau croisé). Dans un lycée de 200 élèves, on note F « l'élève est une fille » et D « l'élève est demi-pensionnaire ».

	D	$\overline{D}$	Total
F	60	60	120
$\overline{F}$	30	50	80
Total	90	110	200

On lit : $P(F \cap D) = \frac{60}{200} = 0,3$ et $P(F) = \frac{120}{200} = 0,6$. Donc

$$P_F(D) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_D(F) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

Parmi les filles, la moitié est demi-pensionnaire. Parmi les demi-pensionnaires, les deux tiers sont des filles. **Ce ne sont pas les mêmes nombres.**

Astuce. Dans un tableau croisé, $P_A(B)$ se lit directement : **effectif de $A \cap B$ divisé par l'effectif de A** . Le dénominateur est celui du « sachant ».

Le mot **sachant** (ou **parmi**, ou **si**) désigne l'événement du dénominateur.

Statistiques et probabilités, même langage. Choisir **au hasard** un élève du lycée, avec la même chance pour chacun, revient à passer d'une population à une expérience aléatoire :

- la **proportion** de filles dans le lycée devient la **probabilité** $P(F)$;
- la **fréquence conditionnelle** des demi-pensionnaires parmi les filles devient la **probabilité conditionnelle** $P_F(D)$.

Lire un tableau croisé d'effectifs, c'est donc calculer des probabilités conditionnelles.

Pièges :

- Ne confonds pas $P(A \cap B)$ (les deux à la fois, sur **tout** l'univers), $P_A(B)$ (parmi A) et $P_B(A)$ (parmi B).
- En général, $P_A(B) \neq P_B(A)$.
- On ne conditionne que par un événement de **probabilité non nulle**.

« Parmi les fumeurs, beaucoup ont une toux » et « parmi les gens qui toussent, beaucoup fument » sont deux phrases très différentes. La seconde fait surtout des victimes chez les rhumes de novembre.

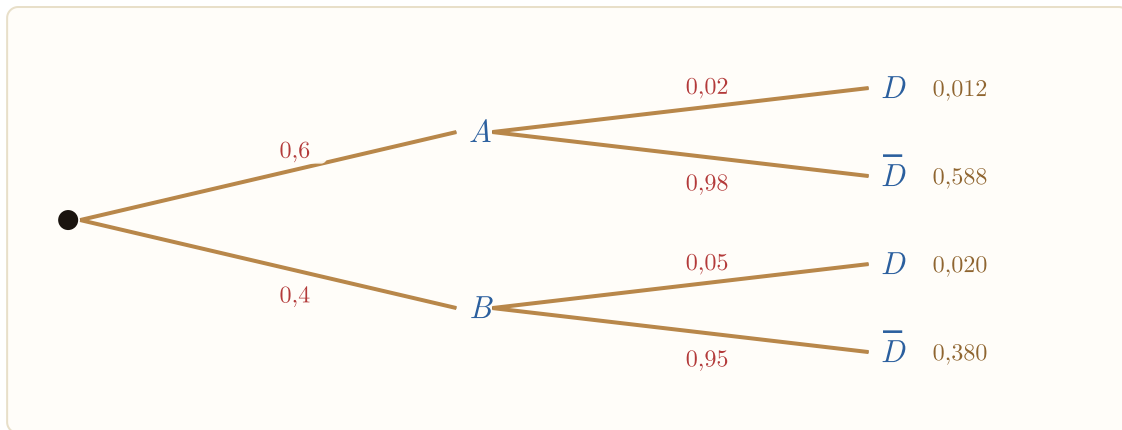
2. Arbres pondérés

Un **arbre pondéré** représente une succession d'étapes. Sur chaque branche, on écrit une probabilité (conditionnelle à ce qui précède).

Règles de l'arbre.

- la **somme** des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ;
- la probabilité d'un **chemin** est le **produit** des probabilités de ses branches : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$;
- la probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui le réalisent.

Exemple. Une usine possède deux machines. La machine A produit 60 % des pièces, la machine B en produit 40 %. Une pièce de A est défectueuse avec la probabilité 0,02, une pièce de B avec la probabilité 0,05. On choisit une pièce au hasard et on note D « la pièce est défectueuse ».



Arbre pondéré : deux machines A et B, une pièce défectueuse D ou non

Le chemin $A \rightarrow D$ a pour probabilité $0,6 \times 0,02 = 0,012$. La lecture des quatre chemins donne la loi du couple (machine, état de la pièce).

Astuce. Vérifie toujours deux choses : **chaque nœud a une somme de branches égale à 1**, et **la somme des feuilles vaut 1** ($0,012 + 0,588 + 0,020 + 0,380 = 1$).

C'est le contrôle le plus rapide pour détecter une erreur de calcul.

Pièges :

- Les probabilités du deuxième niveau sont **conditionnelles** : $0,02 = P_A(D)$, pas $P(D)$.
- On **multiplie** le long d'un chemin et on **additionne** entre chemins : ne mélange pas les deux.
- Un arbre où la somme des branches n'est pas 1 est faux, même s'il est joli.

Un arbre pondéré dont les branches font 1,2 : c'est un arbre qui a trop bien poussé.

3. Partition et formule des probabilités totales

Définition. Des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ de probabilités non nulles forment une **partition de l'univers** s'ils sont **deux à deux incompatibles** et si leur **réunion** est l'univers :

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

Le cas le plus courant est $\{A; \bar{A}\}$.

Formule des probabilités totales. Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers, alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P(A_1) P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) P_{A_n}(B)$$

Démonstration (cas $\{A; \bar{A}\}$). On a $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ et ces deux événements sont **incompatibles**. Donc

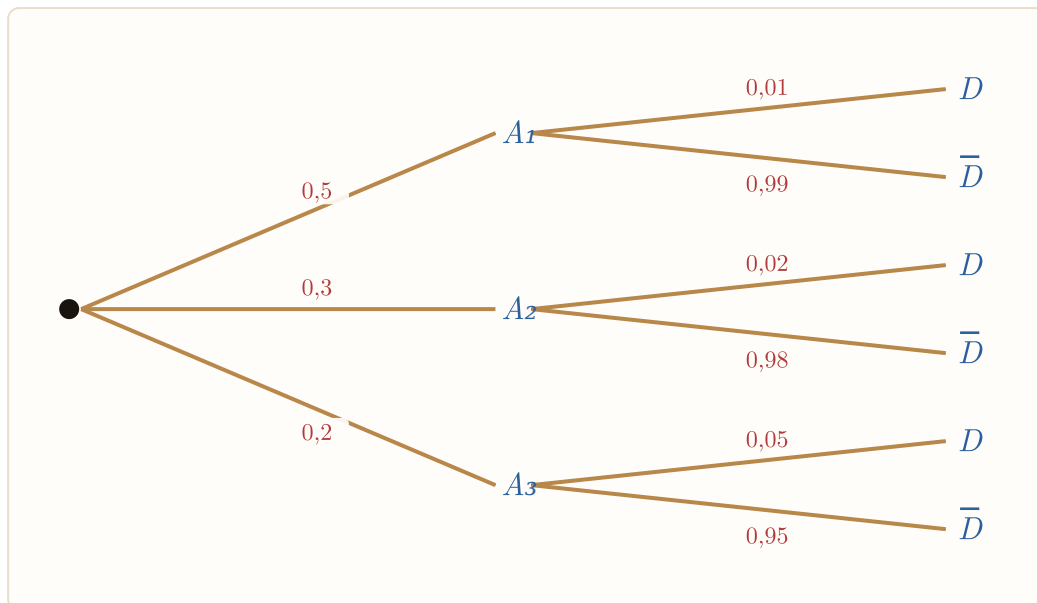
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)$$

Exemple. Dans l'usine :

$$P(D) = P(A) P_A(D) + P(B) P_B(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,032$$

Autrement dit, **3,2 %** des pièces sont défectueuses. **Sur l'arbre, c'est la somme des chemins qui aboutissent à D .**

Exemple avec trois événements. Trois fournisseurs A_1, A_2, A_3 livrent **50 %**, **30 %** et **20 %** des pièces, avec des taux de défaut de **1 %**, **2 %** et **5 %**.



Une partition en trois événements A_1, A_2, A_3 : les trois branches du premier niveau ont une somme égale à 1

$$P(D) = 0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,02 + 0,2 \times 0,05 = 0,005 + 0,006 + 0,010 = 0,021$$

Pièges :

- Avant d'utiliser la formule, **vérifie que les A_i forment une partition** : incompatibles et de somme 1.
- Ne pas oublier **un chemin** (surtout sur un arbre à trois branches).
- Ne pas écrire $P(B) = P_A(B) + P_{\bar{A}}(B)$: il manque les poids $P(A)$ et $P(\bar{A})$.

4. Inverser le conditionnement

On connaît souvent $P_A(B)$ et on cherche $P_B(A)$: c'est l'**inversion du conditionnement**. On utilise la définition deux fois :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Le numérateur est un **chemin** de l'arbre, le dénominateur est donné par la **formule des probabilités totales**.

Exemple. On a trouvé une pièce défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la machine A ?

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,012}{0,032} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Alors que A produit 60 % des pièces, elle ne produit que 37,5 % des pièces défectueuses : la machine B est plus souvent en cause.

Méthode en quatre temps pour une question « sachant que... » :

- **Nommer** les événements avec des lettres ;
- **Dessiner l'arbre** dans l'ordre chronologique et le compléter ;
- **Calculer** $P(B)$ avec les probabilités totales ;
- **Diviser** : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Remarque : pas de formule à apprendre par cœur. Tu entendras parfois le nom de « formule de Bayes » pour l'égalité ci-dessus. Elle **n'est pas une formule du programme** : c'est la définition de la probabilité conditionnelle appliquée deux fois. Pour répondre, il suffit de savoir refaire le calcul **chemin divisé par total**, comme dans la méthode en quatre temps.

Un peu d'histoire (et d'anglais). Les probabilités conditionnelles apparaissent dans des travaux de Bayes et de Moivre, écrits **en anglais** au XVIIIe siècle, même si c'est Laplace qui en a élaboré la notion. Du côté du vocabulaire : *conditional probability* (probabilité conditionnelle), *independent events* (événements indépendants), *tree diagram* (arbre), *law of total probability* (formule des probabilités totales).

Plus généralement, les origines du calcul des probabilités remontent au XVIIe siècle : Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler et d'Alembert l'appliquent à des questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie.

Astuce. L'arbre est écrit dans l'ordre du **temps** (machine puis défaut). La question « sachant D » demande de **remonter** : c'est pour cela qu'on ne peut pas la lire directement sur l'arbre.

Pièges :

- Ne réponds pas 0,02 à « sachant que la pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de A ? » : 0,02 est $P_A(D)$, pas $P_D(A)$.
- Dans un test médical, **un test fiable à 95 %** ne signifie pas « **un test positif est vrai à 95 %** ».
- Ne divise pas par $P(A)$ quand on conditionne par B .

« Tous les hommes politiques sont des gens qui parlent. Donc tous ceux qui parlent sont des politiques. » Voilà l'inversion sans calcul : ne le fais pas.

5. Événements indépendants

Définition. Deux événements A et B sont **indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Si $P(A) \neq 0$, cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$: **savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B .**

Exemple. On lance un dé équilibré. A : « le résultat est pair » ; B : « le résultat est multiple de 3 ».

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad A \cap B = \{6\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

Donc A et B sont indépendants. En revanche, avec C : « le résultat est au moins 4 », on a $A \cap C = \{4; 6\}$ et $P(A \cap C) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$: A et C ne sont **pas** indépendants.

Modèle et réalité. Dans un exercice, l'indépendance est de deux sortes. Tantôt c'est une **hypothèse du modèle** : « les deux lancers sont indépendants » (deux dés physiques lancés séparément), on l'**utilise** pour multiplier. Tantôt c'est une **propriété à vérifier** : « montrer que A et B sont indépendants », on la **démontre** par le calcul de $P(A \cap B)$ et de $P(A)P(B)$.

Propriété. Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi (de même pour A et $\bar{B}$, et pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$).

Démonstration. $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1 - P(A)] = P(\bar{A})P(B)$.

Incompatibles et indépendants, ce n'est pas la même chose. Si A et B sont **incompatibles** avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$: **ils ne sont pas indépendants**. Deux événements incompatibles sont même très dépendants : si l'un se réalise, l'autre ne peut pas se réaliser.

Astuce. Pour **prouver** l'indépendance, calcule $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$ puis compare. Pour la **réfuter**, une seule différence suffit. **L'indépendance se vérifie par le calcul**, jamais à l'œil.

Pièges :

- **Incompatibles $\neq$ indépendants.**
- Dans l'énoncé, « **indépendants** » est parfois une **hypothèse du modèle** (deux lancers de dé) : on l'utilise directement pour multiplier.
- Des tirages **sans remise** ne sont **pas** indépendants : la composition de l'urne change.

Un lancer de dé n'a pas de mémoire. Il ne sait pas qu'il a sorti trois fois de suite un six, et il s'en moque.

6. Succession de deux épreuves indépendantes

Beaucoup d'expériences se font **en deux temps** : on lance un dé **puis** une pièce, on tire une boule **puis** on lance un dé. Les deux épreuves sont **indépendantes** quand le résultat de la première n'influence en rien la seconde. Comme pour deux événements, c'est une **hypothèse du modèle** : elle vient de l'analyse de la situation (deux objets lancés séparément), pas de l'arbre.

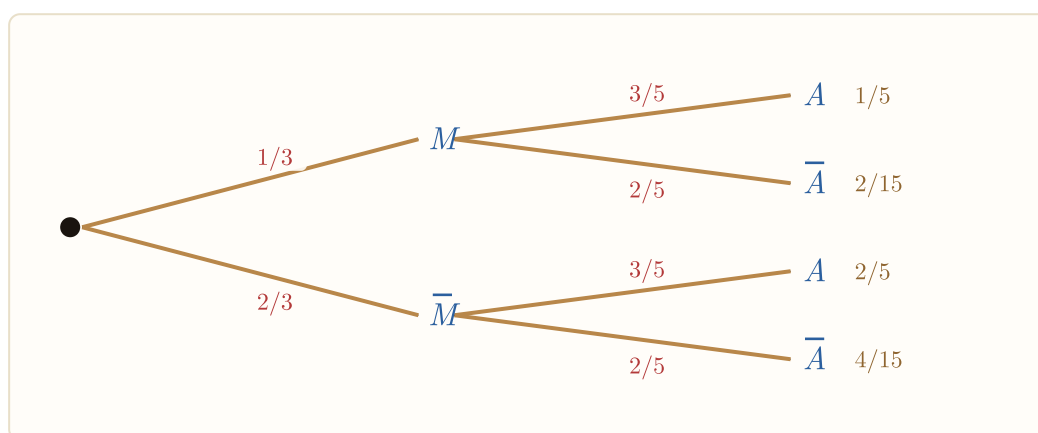
Définition. Deux épreuves qui se succèdent sont **indépendantes** si tout événement A lié à la première épreuve est indépendant de tout événement B lié à la seconde :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Pourquoi on multiplie le long d'un chemin.

- Un chemin à deux branches représente $A \cap B$. Par définition, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Les épreuves sont indépendantes, donc $P_A(B) = P(B)$: la branche du deuxième niveau porte la même probabilité $P(B)$ quelle que soit la branche d'où l'on vient. Ainsi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Avec trois épreuves, le chemin $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$ représente $A_1 \cap A_2 \cap A_3$. L'événement $A_1 \cap A_2$ est lié aux deux premières épreuves, donc il est indépendant de A_3 : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \times P(A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$.
- On recommence pour un quatrième niveau : la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.

Exemple : deux épreuves de natures différentes. On lance un dé équilibré, puis, indépendamment, une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité $\frac{3}{5}$. On note M : « le dé donne un multiple de 3 », donc $P(M) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, et A : « la pièce donne pile ».



Un dé puis une pièce truquée : à droite, la probabilité de chaque chemin

La même situation se présente dans un **tableau à double entrée** : les probabilités de la première épreuve sont en marge à gauche, celles de la seconde en marge en haut, et **chaque case est le produit de ses deux marges**.

	A (pile)	$\bar{A}$ (face)	Total
M	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$
$\bar{M}$	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$	$\frac{2}{3}$
Total	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

On lit par exemple $P(M \cap A) = \frac{1}{5}$. Pour « le dé donne un multiple de 3 **ou** la pièce donne pile » :
 $P(M \cup A) = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{11}{15}$, ce que confirme la somme des trois cases concernées, $\frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$.

Exemple : deux épreuves de même nature. Pour deux lancers d'un dé équilibré, les 36 couples $(a; b)$ sont équiprobables, chacun de probabilité $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Le tableau donne la somme de chaque couple :

1er dé \ 2e dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La somme 7 apparaît 6 fois : $P(\text{somme} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Astuce. Le tableau à double entrée **produit** est la signature de l'indépendance. Dans le tableau croisé du début du cours, $P(F \cap D) = 0,3$ alors que $P(F) \times P(D) = 0,6 \times 0,45 = 0,27$: les cases ne sont pas des produits, et F et D ne sont **pas** indépendants.

Pièges :

- Écrire un produit sans avoir dit que les épreuves sont **indépendantes**.
- Mettre sur le deuxième niveau d'un arbre des probabilités qui **changent** selon la branche, alors que l'énoncé annonce des épreuves indépendantes.
- Oublier que le tableau et l'arbre disent la **même chose** : les quatre cases ont pour somme 1.

Le dé et la pièce ne se parlent pas. Pas de réunion de coordination entre les deux : ils tombent chacun de leur côté.

7. Épreuves de Bernoulli répétées ($n \leq 4$)

Épreuve de Bernoulli. C'est une expérience à **deux issues** : le **succès** S (probabilité p) et l'**échec** $\bar{S}$ (probabilité $q = 1 - p$).

Quand une expérience a plus de deux issues, on choisit ce qu'on appelle « succès » : obtenir un 6 avec un dé est une épreuve de Bernoulli avec $p = \frac{1}{6}$ (l'échec regroupe les cinq autres faces).

Pour répéter une épreuve de Bernoulli, il faut deux ingrédients à ne pas mélanger.

- Les épreuves sont **indépendantes** : le résultat des épreuves précédentes ne change pas les probabilités de l'épreuve suivante.
- Les épreuves sont **identiques** : c'est la même épreuve de Bernoulli à chaque fois, avec la **même probabilité de succès** p .

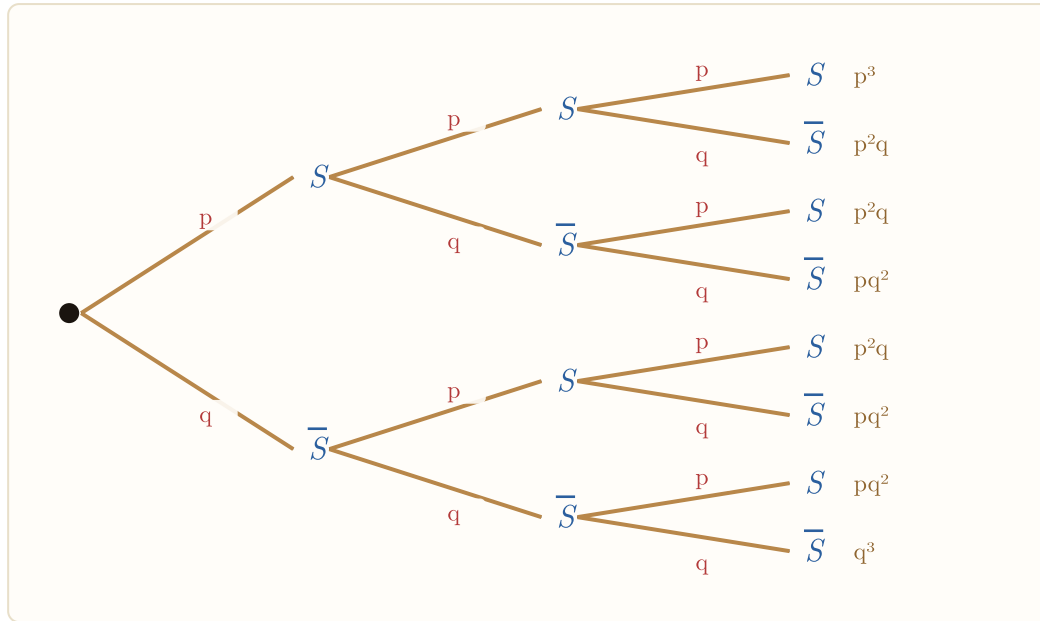
Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**. Au programme de Première, $n \leq 4$ et on le représente par un **arbre**.

Situation	Indépendantes ?	Identiques ?	Schéma de Bernoulli ?
Trois lancers de la même pièce, succès = pile	oui	oui	oui
Trois tirages avec remise dans une urne ($p = \frac{2}{5}$ de tirer rouge)	oui	oui	oui
Un dé, puis une pièce truquée	oui	non (deux épreuves différentes)	non
Deux tirs à des distances différentes ($p_1 = 0,4$ puis $p_2 = 0,9$), tirs indépendants	oui	non (p change)	non
Deux tirages sans remise (urne de 3 rouges et 2 bleues, succès = rouge)	non	non (la probabilité conditionnelle de rouge passe de $\frac{2}{4}$ à $\frac{3}{4}$)	non
Un tireur qui réussit son deuxième tir avec la probabilité 0,8 s'il a réussi le premier, 0,5 sinon	non	non	non

Les deux notions sont donc **distinctes** : un dé suivi d'une pièce donne des épreuves indépendantes mais pas identiques, et il n'y a pas de $p^k q^{n-k}$. Dans un tirage sans remise, la probabilité d'obtenir rouge au **deuxième** tirage est bien la même qu'au premier (voir l'exercice 5 de la fiche 1), mais les tirages **ne sont pas indépendants**, et l'arbre change de poids d'une branche à l'autre.

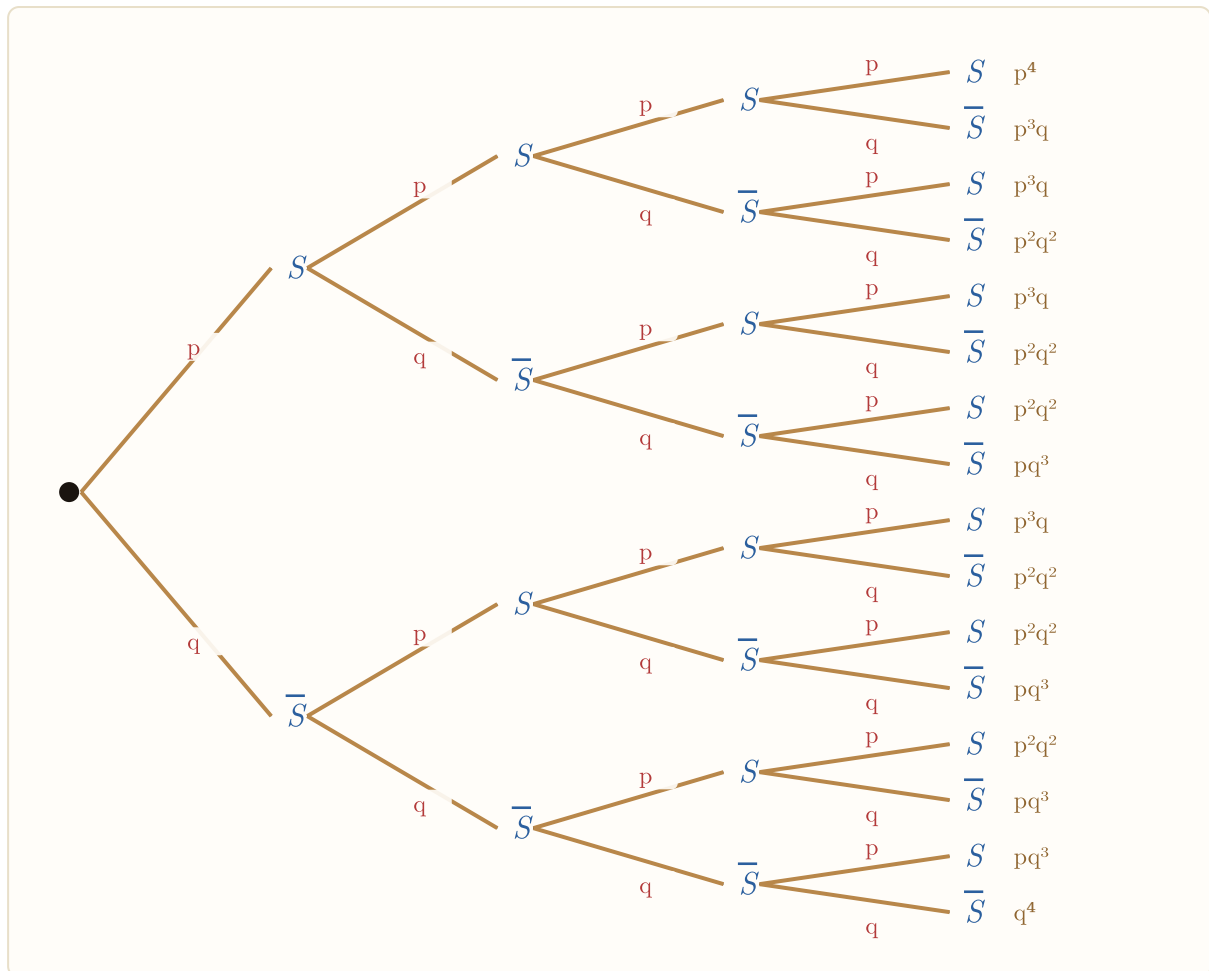
Astuce. Pour justifier un schéma de Bernoulli, écris **trois phrases** : « chaque épreuve a **deux issues** », « elles sont **indépendantes** », « la probabilité de succès est **la même p** à chaque fois ». Un tirage **avec remise** convient, un tirage **sans remise** non.

Avec deux épreuves, l'arbre a quatre chemins : $P(SS) = p^2$, $P(S\bar{S}) = P(\bar{S}S) = pq$ et $P(\bar{S}\bar{S}) = q^2$. Avec trois épreuves :



Trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes : succès S (probabilité p), échec $\bar{S}$ (probabilité $q = 1 - p$)

D'après le §6, la probabilité d'un chemin est le produit de ses branches : **un chemin contenant k succès et $n - k$ échecs a pour probabilité $p^k q^{n-k}$** , quel que soit l'ordre des succès. Avec quatre épreuves, l'arbre a $2^4 = 16$ chemins :



Quatre épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes : 16 chemins, à droite la probabilité de chaque chemin

Compter les chemins à k succès

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le réalisent. Pour « **exactement k succès** », tous les chemins concernés ont la même probabilité $p^k q^{n-k}$ et sont deux à deux incompatibles. Il reste donc à **compter** ces chemins :

$$P(\text{exactement } k \text{ succès}) = (\text{nombre de chemins à } k \text{ succès}) \times p^k q^{n-k}$$

Pour $n = 4$ et $k = 2$, on écrit **tous** les chemins, en notant $\bar{S}$ l'échec : $SS\bar{S}\bar{S}$, $S\bar{S}S\bar{S}$, $S\bar{S}\bar{S}S$, $\bar{S}SS\bar{S}$, $\bar{S}\bar{S}SS$, $\bar{S}\bar{S}\bar{S}S$. Il y en a **six**, ce sont les chemins marqués ci-dessous.



Nombre de succès k	0	1	2	3	4
Chemins pour $n = 2$	1	2	1		
Chemins pour $n = 3$	1	3	3	1	
Chemins pour $n = 4$	1	4	6	4	1

Exemple. Avec $p = 0,3$ et $q = 0,7$. Pour $n = 3$: $P(SSS) = 0,3^3 = 0,027$ et $P(\text{exactement deux succès}) = 3 \times 0,3^2 \times 0,7 = 0,189$. Pour $n = 4$, voici la probabilité de chaque nombre de succès :

Nombre de succès k	0	1	2	3	4
Chemins	1	4	6	4	1
Probabilité d'un chemin	$0,7^4 = 0,2401$	$0,3 \times 0,7^3 = 0,1029$	$0,3^2 \times 0,7^2 = 0,0441$	$0,3^3 \times 0,7 = 0,0189$	$0,3^4 = 0,0081$
Probabilité de k succès	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

On vérifie : $0,2401 + 0,4116 + 0,2646 + 0,0756 + 0,0081 = 1$. Pour « au moins deux succès », la somme des trois dernières colonnes donne $0,2646 + 0,0756 + 0,0081 = 0,3483$, ou, par le contraire, $1 - 0,2401 - 0,4116 = 0,3483$.

$$P(\text{au moins un succès}) = 1 - P(\overline{S}\overline{S}\overline{S}) = 1 - q^3 = 1 - 0,7^3 = 0,657 \quad (n = 3)$$

Astuce. Pour « au moins un », passe par le **contraire** : $P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun})$. Sur un arbre de 16 chemins, c'est une économie de 15 calculs : pour $n = 4$ et $p = 0,3$, $1 - 0,7^4 = 0,7599$.

Exemple avec une urne. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules bleues. On tire 3 boules **avec remise** ; le succès est « la boule est rouge », $p = \frac{2}{5}$ à chaque tirage. Alors $P(\text{au moins une rouge}) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{98}{125}$. **Sans remise**, on ne peut plus utiliser ce schéma : $P(\text{aucune rouge}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$ et $P(\text{au moins une rouge}) = \frac{9}{10}$.

Pièges :

- Pour « exactement k succès », **compte tous les chemins** : l'ordre des succès peut changer. Écrire $P(\text{exactement un succès sur 4}) = p q^3$ oublie les **quatre** chemins.
- Vérifie que p **reste le même** à chaque épreuve (tirage **avec** remise) et que les épreuves sont **indépendantes**.
- $p^k q^{n-k}$ est la probabilité d'un **seul** chemin, pas de l'événement.
- Au-delà de $n = 4$, l'arbre devient trop grand pour être dessiné : ce n'est plus au programme de Première.

Gagner une fois au loto ne change pas ta probabilité de gagner au tirage suivant. Elle reste très faible. L'espoir aussi, mais ce n'est pas une probabilité.

Pour aller plus loin (approfondissement du programme, hors contrôle) : une marche aléatoire.

Un pion part de la case 0 d'un axe. À chaque pas, il avance d'une case ou recule d'une case, avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacun, indépendamment des pas précédents. L'arbre de 3 pas a 8 chemins de probabilité $\frac{1}{8}$. La position finale est (nombre d'avancées) – (nombre de reculs) : elle vaut 3, 1, –1 ou –3 pour respectivement 3, 2, 1 ou 0 avancée, c'est-à-dire avec les probabilités $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{8}$.

Après 2 pas, le pion est revenu en 0 pour les chemins « avance puis recule » et « recule puis avance » : probabilité $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

8. Simulation avec Python : la méthode de Monte-Carlo

Quand un calcul exact est difficile, on **simule** l'expérience un grand nombre de fois et on regarde la **fréquence** du résultat. C'est la **méthode de Monte-Carlo**.

Exemple : estimer l'aire sous la parabole $y = x^2$ sur $[0; 1]$. On tire au hasard un point $(x; y)$ dans le carré $[0; 1]^2$. La probabilité qu'il soit **sous la courbe** est égale à l'aire cherchée.

```
from random import random

def monte_carlo(n):
    dessous = 0
    for _ in range(n):
        x, y = random(), random()
        if y <= x ** 2:
            dessous += 1
    return dessous / n

print(monte_carlo(100000))
```

Le résultat varie d'une exécution à l'autre mais reste proche de **0,333**, valeur exacte $\frac{1}{3}$ (tu le démontreras en Terminale avec les intégrales). Pour estimer π , on remplace la condition par $x**2 + y**2 <= 1$: la fréquence tend vers $\frac{\pi}{4}$ (aire du quart de disque), et $4 * \text{dessous} / n$ approche π .

Astuce. Plus n est grand, plus la fréquence est stable. Avec $n = 100$ le résultat est approximatif, avec $n = 100\,000$ on a en général deux chiffres exacts.

Autre exemple : simuler un schéma de Bernoulli. Pour vérifier le calcul du §7 ($n = 4$, $p = 0,3$, $P(\text{exactement deux succès}) = 0,2646$), on répète 4 épreuves de succès 0,3 et on compte les expériences qui donnent exactement deux succès :

```

from random import random

def deux_succes(N):
    cas = 0
    for _ in range(N):
        succes = 0
        for _ in range(4):
            if random() < 0.3:
                succes += 1
        if succes == 2:
            cas += 1
    return cas / N

print(deux_succes(100000))

```

La fréquence obtenue est proche de **0,2646** (par exemple **0,26** ou **0,27**), sans jamais être exactement égale à cette valeur : c'est une **estimation**, le calcul par l'arbre est **exact**.

Ce qui peut tomber en contrôle

- Lire une **probabilité conditionnelle** dans un tableau croisé.
- **Construire** et **compléter** un arbre pondéré.
- Utiliser la **formule des probabilités totales**.
- **Inverser** le conditionnement ($P_B(A)$ à partir de $P_A(B)$) en refaisant le calcul chemin divisé par total.
- **Justifier ou réfuter l'indépendance** de deux événements.
- Succession de **deux épreuves indépendantes** : arbre et **tableau à double entrée**, produit le long d'un chemin **justifié**.
- Distinguer épreuves **identiques** et **indépendantes**, justifier un **schéma de Bernoulli**.
- Arbre pour **trois ou quatre épreuves de Bernoulli** : **compter les chemins à k succès**, probabilités d'« **exactement k succès** » et d'« **au moins un succès** ».
- Lire ou écrire un **script de simulation** (Monte-Carlo).

Tu as maintenant le cours. Passe aux trois fiches, aux exercices de synthèse, puis au Guide de rédaction du chapitre.