

Probabilités conditionnelles et indépendance : exercices de synthèse

Trois exercices **de synthèse**, corrigés question par question, avec la rédaction attendue. Cherche chaque question seul avant de lire la correction.

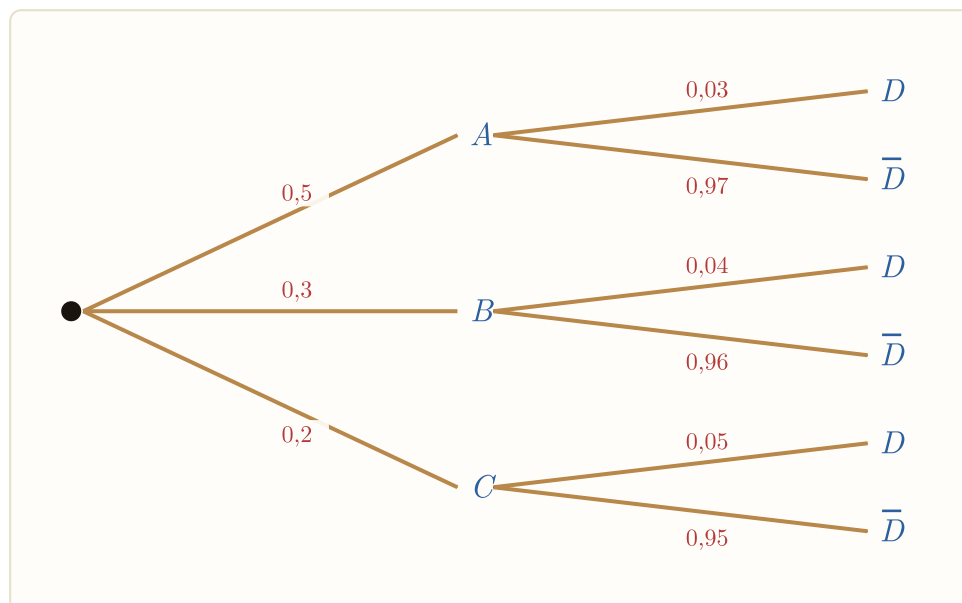
Exercice 1 : un contrôle qualité

Un fabricant d'ordinateurs reconditionnés reçoit ses appareils de trois ateliers A , B , C : 50 %, 30 % et 20 % de la production. La probabilité qu'un appareil soit défectueux est 0,03 pour A , 0,04 pour B et 0,05 pour C . On choisit un appareil au hasard et on note D : « il est défectueux ».

1. Dessiner l'arbre pondéré.
2. Calculer $P(D)$.
3. Un appareil est défectueux. Calculer la probabilité qu'il vienne de chacun des trois ateliers. Quel atelier est le plus probable ?
4. On prélève deux appareils de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'ils soient tous les deux défectueux.

Correction de la question 1

L'arbre a trois branches de premier niveau (0,5, 0,3, 0,2) et deux branches par nœud (D et $\bar{D}$).



Arbre de l'exercice 1

Correction de la question 2

A, B, C forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = 0,5 \times 0,03 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 = 0,015 + 0,012 + 0,010 = 0,037.$$

$$P(D) = 0,037.$$

Correction de la question 3

$$P_D(A) = \frac{0,015}{0,037} = \frac{15}{37} \approx 0,405.$$

$$P_D(B) = \frac{0,012}{0,037} = \frac{12}{37} \approx 0,324 \text{ et } P_D(C) = \frac{0,010}{0,037} = \frac{10}{37} \approx 0,270.$$

$$\text{Vérification : } \frac{15 + 12 + 10}{37} = 1.$$

L'atelier A est le plus probable (environ 40,5 %), alors que C est le plus défectueux par appareil.

Correction de la question 4

Les deux prélèvements sont indépendants : $P = 0,037 \times 0,037 = 0,037^2$.

$$P \approx 0,00137.$$

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : arbre complet, branches de somme 1.
- **Q2** : partition **citée**, trois chemins additionnés.
- **Q3** : formule d'inversion pour chaque atelier, **vérification** de la somme.
- **Q4** : hypothèse d'indépendance citée avant de multiplier.

Exercice 2 : un QCM au hasard

Un élève répond au hasard à un QCM de 4 questions. Chaque question propose 4 réponses dont une seule est correcte. Les réponses sont indépendantes. On note S : « la réponse est correcte ».

1. Donner $P(S)$ et $P(\overline{S})$.
2. Calculer la probabilité de répondre juste aux 4 questions.
3. Calculer la probabilité d'avoir **au moins une** bonne réponse.
4. Calculer la probabilité d'avoir **exactement une** bonne réponse.
5. Calculer la probabilité d'avoir **exactement deux** bonnes réponses (on écrira les chemins correspondants de l'arbre à quatre niveaux).
6. Donner la probabilité de 0, 1, 2, 3 et 4 bonnes réponses et vérifier que la somme vaut 1.
7. Pour valider le QCM, il faut au moins 2 bonnes réponses. Quelle est la probabilité de le valider en répondant au hasard ?

Correction de la question 1

Une réponse sur 4 est correcte et l'élève répond au hasard.

$$P(S) = \frac{1}{4} \text{ et } P(\overline{S}) = \frac{3}{4}.$$

Correction de la question 2

Les réponses sont indépendantes : $P = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$.

$$P = \frac{1}{256} \approx 0,0039.$$

Correction de la question 3

Le contraire est « aucune bonne réponse » : $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$.

$$P = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} \approx 0,684.$$

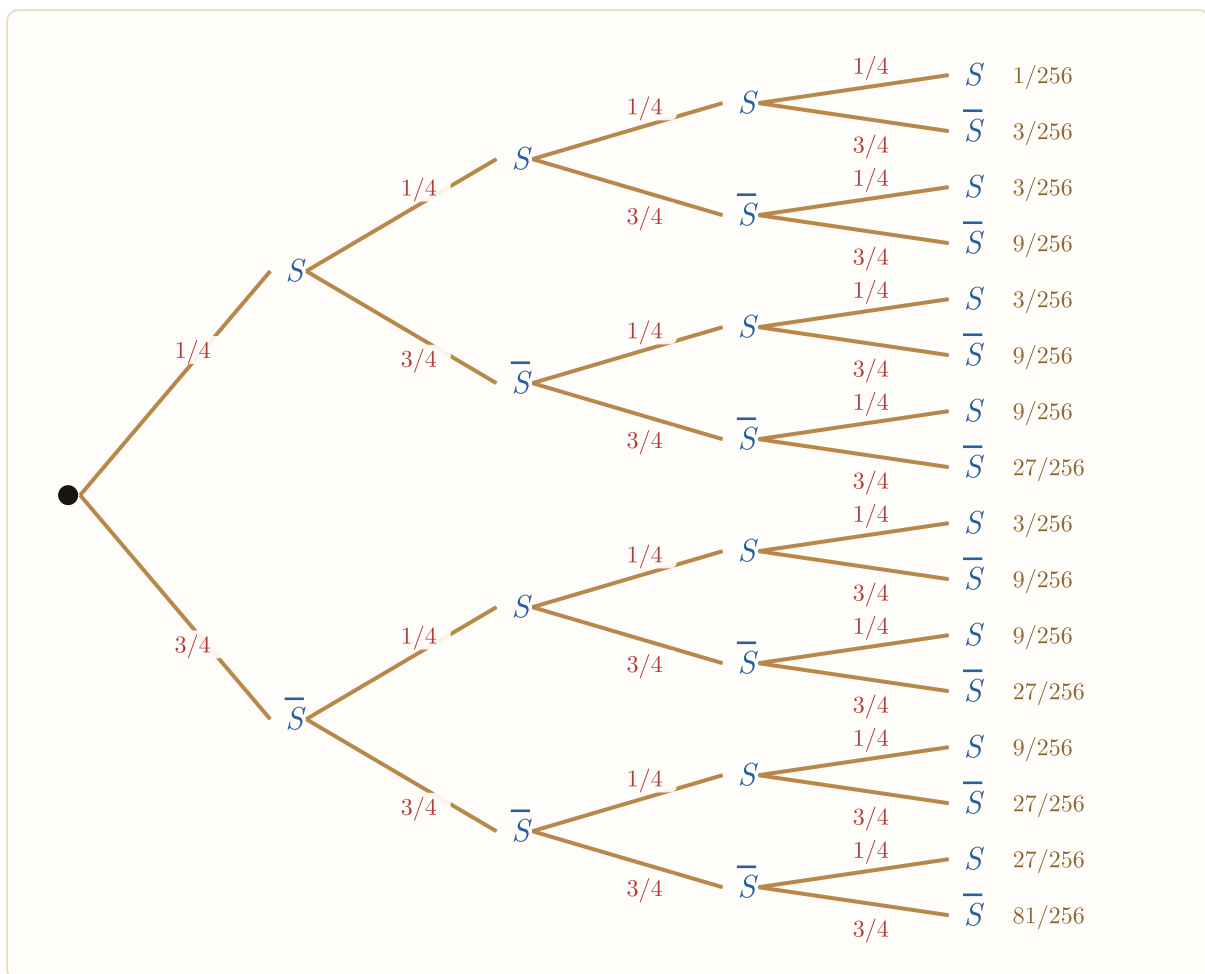
Correction de la question 4

Il y a 4 chemins possibles (la bonne réponse est à la question 1, 2, 3 ou 4). Chaque chemin vaut $\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{256}$.

$$P = 4 \times \frac{27}{256} = \frac{27}{64} \approx 0,422.$$

Correction de la question 5

Les chemins à deux bonnes réponses sont $SS\bar{S}\bar{S}$, $S\bar{S}S\bar{S}$, $S\bar{S}\bar{S}S$, $\bar{S}SS\bar{S}$, $\bar{S}S\bar{S}S$ et $\bar{S}\bar{S}SS$: il y en a 6. Chacun a pour probabilité $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{256}$ (hypothèse d'indépendance).



Arbre du QCM : les chemins marqués ont exactement deux bonnes réponses

$$P = 6 \times \frac{9}{256} = \frac{54}{256} = \frac{27}{128} \approx 0,211.$$

Correction de la question 6

Nombres de chemins : 1, 4, 6, 4, 1. Probabilités : $P(0) = \frac{81}{256}$, $P(1) = 4 \times \frac{27}{256} = \frac{108}{256}$, $P(2) = \frac{54}{256}$, $P(3) = 4 \times \frac{3}{256} = \frac{12}{256}$ et $P(4) = \frac{1}{256}$.

Bonnes réponses	0	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

Somme : $\frac{81 + 108 + 54 + 12 + 1}{256} = \frac{256}{256} = 1$.

Correction de la question 7

Par le contraire : $P(\text{au moins 2}) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \frac{81 + 108}{256} = \frac{67}{256}$. Par la somme : $\frac{54 + 12 + 1}{256} = \frac{67}{256}$.

$P \approx 0,262$: environ une chance sur quatre de valider au hasard.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : probabilités de S et $\bar{S}$ justifiées.
- **Q2** : indépendance citée, puissance.
- **Q3** : passage par le **contraire**.
- **Q4** : **nombre de chemins** puis produit.
- **Q5** : les six chemins **écrits**, probabilité d'un chemin, produit.
- **Q6** : les cinq probabilités et la **somme vérifiée**.
- **Q7** : « au moins deux » par le contraire, recoupé par la somme.

Exercice 3 : Monte-Carlo et l'aire sous une parabole

On tire un point $M(x; y)$ au hasard dans le carré $[0; 1]^2$ (les coordonnées sont indépendantes). On note E : « M est sous la parabole $y = x^2$ », c'est-à-dire $y \leq x^2$. On admet que l'aire de la région comprise entre l'axe des abscisses, la parabole et la droite $x = 1$ vaut $\frac{1}{3}$.

1. Justifier que $P(E) = \frac{1}{3}$.
2. Écrire une fonction Python `estime(n)` qui renvoie la fréquence de E sur n tirages.
3. On obtient 0,3318 avec $n = 100\,000$. Ce résultat est-il cohérent ?
4. Même question avec la courbe $y = \sqrt{x}$: quelle valeur exacte la fréquence doit-elle approcher ? (Indication : les courbes $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.)

Correction de la question 1

Le point est tiré uniformément dans le carré : la probabilité d'être dans une région est le rapport des aires.

Le carré a pour aire 1 et la région E a pour aire $\frac{1}{3}$.

$$P(E) = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}.$$

Correction de la question 2

```
from random import random

def estime(n):
    dessous = 0
    for _ in range(n):
        x, y = random(), random()
        if y <= x ** 2:
            dessous += 1
    return dessous / n
```

La fonction compte les points sous la courbe et renvoie la fréquence.

Correction de la question 3

$\frac{1}{3} \approx 0,3333$ et l'écart avec 0,3318 est d'environ 0,0015.

Le résultat est cohérent : la fréquence est proche de la probabilité exacte.

Correction de la question 4

La symétrie par rapport à la droite $y = x$ échange x et y : elle conserve le carré et les aires, et elle envoie la parabole $y = x^2$ sur la courbe $y = \sqrt{x}$ (pour $x \geq 0$). Elle envoie donc la région **au-dessus** de la parabole, $x^2 \leq y$, sur la région **sous** la courbe $y = \sqrt{x}$, $y \leq \sqrt{x}$. Ces deux régions ont la même aire.

La région au-dessus de la parabole est le complément de E dans le carré : son aire est $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Aire sous $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$. Dans le script, la condition devient `y <= x ** 0.5`.

La fréquence doit approcher $\frac{2}{3} \approx 0,667$.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : rapport d'aires **justifié**.
- **Q2** : boucle, compteur, fréquence.
- **Q3** : comparaison à la valeur exacte.
- **Q4** : argument de symétrie, condition modifiée, valeur $\frac{2}{3}$.