

Probabilités conditionnelles et indépendance**Fiche Standard**

Nom : _____

Date : _____

Exercice S1 : Trois forfaits

Un opérateur répartit ses clients en trois forfaits : F_1 (50 % des clients), F_2 (30 %) et F_3 (20 %). Sur une année, la probabilité de résiliation est 0,10 pour un client du forfait F_1 , 0,06 pour F_2 et 0,02 pour F_3 . On choisit un client au hasard et on note R : « le client résilie dans l'année ».

1. Dessiner l'arbre pondéré.
2. Montrer que $P(R) = 0,072$.
3. Un client a résilié. Calculer la probabilité qu'il ait eu le forfait F_k , pour $k = 1, 2, 3$ (valeurs exactes). Vérifier que la somme des trois valeurs vaut 1.
4. On choisit trois clients de façon indépendante (la clientèle est assez nombreuse pour que ce modèle soit acceptable). Calculer, au millième près, la probabilité qu'au moins un des trois résilie dans l'année.

Exercice S2 : Un paramètre à déterminer

Dans un lycée, une proportion x des élèves, avec $0 < x < 1$, choisit le menu A à la cantine ; les autres élèves choisissent le menu B. Un élève du menu A se déclare satisfait (S) avec la probabilité 0,7, un élève du menu B avec la probabilité 0,3. On interroge un élève au hasard et on note A : « l'élève a choisi le menu A ».

1. Exprimer $P(S)$ en fonction de x .
2. Une enquête montre que 46 % des élèves sont satisfaits. En déduire la valeur de x .
3. Dans ce cas, un élève est satisfait. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le menu A ?
4. Existe-t-il une valeur de x de l'intervalle $]0 ; 1[$ pour laquelle A et S sont indépendants ? Justifier.

Exercice S3 : Indépendance sur deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces, l'un rouge et l'autre bleu. L'univers est le produit cartésien $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\} \times \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ des couples $(r ; b)$ de résultats : $\text{Card}(\Omega) = 36$ et les issues sont équiprobables. On note A : « la somme est paire », B : « le dé rouge donne 6 » et C : « la somme est supérieure ou égale à 9 ».

1. Déterminer $\text{Card}(A)$, $\text{Card}(B)$ et $\text{Card}(C)$, puis calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Les événements B et C sont-ils indépendants ?
4. Les événements A et C sont-ils indépendants ?
5. Calculer $P_C(B)$ et $P_B(C)$. Pourquoi ces deux nombres sont-ils différents ?
6. Sans nouveau dénombrement, calculer $P(\overline{A} \cap B)$ en justifiant.

Exercice S4 : Dépistage et prévalence

Une maladie touche une proportion p de la population, avec $0 < p < 1$. Un test est positif (T) avec la probabilité 0,95 pour une personne malade (M) et avec la probabilité 0,05 pour une personne non malade.

1. On suppose $p = 0,01$ et on considère 10 000 personnes. Compléter, en effectifs attendus, un tableau croisé « malade / test », puis en déduire $P_T(M)$ sous forme de fraction irréductible.
2. Exprimer $P(T)$ en fonction de p , puis montrer que

$$P_T(M) = \frac{0,95p}{0,9p + 0,05}.$$

3. Pour quelle valeur de p a-t-on $P_T(M) = 0,5$?
4. Calculer $P_T(M)$ pour $p = 0,2$. Commenter en une phrase l'influence de p sur la fiabilité d'un test positif.

Exercice S5 : Une urne à trois couleurs

Une urne contient 3 boules rouges, 4 noires et 3 blanches. On tire successivement et sans remise deux boules. On note R_1 et R_2 les événements « la première (resp. la seconde) boule est rouge ».

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur.
2. Calculer $P(R_2)$ avec la formule des probabilités totales, en utilisant la partition $\{R_1; N_1; B_1\}$ (couleur de la première boule).
3. La seconde boule est rouge. Calculer la probabilité que la première soit rouge.
4. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?
5. Reprendre la question 1 si le tirage se fait avec remise. Comparer.

Exercice S6 : Trois fléchettes

Un joueur lance trois fléchettes. À chaque lancer, il touche la cible avec la probabilité 0,4, de façon indépendante des autres lancers. On note X le nombre de fois où la cible est touchée.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré (ou en décrire les huit chemins).
2. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 3)$.
3. Montrer que $P(X = 1) = 0,432$. Donner de même $P(X = 2)$.
4. Calculer $P(X \geq 2)$.
5. Le joueur lance désormais n fléchettes. On considère le programme suivant.

```
n = 1
while 1 - 0.6**n < 0.99:
    n = n + 1
print(n)
```

Que représente la quantité $1 - 0,6^n$? Quelle valeur le programme affiche-t-il ? Justifier à l'aide de $0,6^9$ et $0,6^{10}$.

Exercice S7 : Météo en chaîne

Dans une station, on note B_n l'événement « il fait beau le jour n » et $u_n = P(B_n)$. Le jour 1, il fait beau : $u_1 = 1$. S'il fait beau un jour, il fait beau le lendemain avec la probabilité 0,8 ; s'il ne fait pas beau, il fait beau le lendemain avec la probabilité 0,4.

1. Dessiner l'arbre des trois premiers jours. Calculer u_2 et u_3 .
2. Il fait beau le jour 3. Calculer la probabilité qu'il ait fait beau le jour 2.
3. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,4u_n + 0,4$.
4. On pose $v_n = u_n - \frac{2}{3}$. Montrer que (v_n) est géométrique, puis exprimer u_n en fonction de n .
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n - \frac{2}{3} < 0,001$.

Exercice S8 : Démonstration guidée

Soient A et B deux événements indépendants. On veut démontrer que $\bar{A}$ et B sont indépendants.

1. Justifier que B est la réunion de deux événements incompatibles, puis que $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.
2. En déduire que $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$ et conclure.
3. Application : $P(A) = 0,35$ et $P(B) = 0,6$. Calculer $P(\bar{A} \cap B)$, puis $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, en justifiant que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.
4. En déduire $P(A \cup B)$ et vérifier le résultat avec la formule $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercice S9 : Simulation d'une probabilité conditionnelle

On lance deux dés équilibrés. On note A : « la somme est supérieure ou égale à 8 » et B : « au moins un dé affiche 6 ». On considère le programme suivant.

```
from random import randint
```

```
def estimation(n):
    na = 0
    nab = 0
    for _ in range(n):
        d1 = randint(1, 6)
        d2 = randint(1, 6)
        if d1 + d2 >= 8:
            na = na + 1
            if d1 == 6 or d2 == 6:
                nab = nab + 1
    return nab / na
```

1. Quelle probabilité `estimation(n)` approche-t-elle? Pourquoi divise-t-on par `na` et non par `n`?
2. Calculer cette probabilité exacte.
3. Calculer $P_B(A)$ de façon exacte, puis indiquer comment modifier le programme pour l'estimer.

Exercice S10 : Estimation de π par la méthode de Monte-Carlo

On choisit au hasard un point $M(x; y)$ dans le carré $[0; 1] \times [0; 1]$: la probabilité que M appartienne à une partie du carré est égale à l'aire de cette partie. On note Q l'événement « M appartient au quart de disque de centre O et de rayon 1 », c'est-à-dire « $x^2 + y^2 \leq 1$ ».

1. Justifier que $P(Q) = \frac{\pi}{4}$ et donner une valeur approchée de $P(Q)$ au dix-millième.
2. On considère le programme suivant.

```
from random import random

def monte_carlo(n):
    c = 0
    for _ in range(n):
        x = random()
        y = random()
        if x * x + y * y <= 1:
            c = c + 1
    return 4 * c / n
```

- a) Que représente $\frac{c}{n}$? Pourquoi la fonction renvoie-t-elle une approximation de π ?
 - b) Lors d'une exécution, `monte_carlo(10000)` a renvoyé 3,1448. Combien de points sur les 10 000 étaient dans le quart de disque? Deux exécutions successives donnent-elles le même résultat?
 - c) Quelle modification apporter au programme pour estimer l'aire de la région du carré située sous la parabole d'équation $y = x^2$? On admet que cette aire vaut $\frac{1}{3}$: quelle valeur la fonction modifiée doit-elle renvoyer pour n grand?
3. On génère maintenant les points sous forme de liste.

```
pts = [(0.2, 0.9), (0.7, 0.8), (0.5, 0.5), (0.9, 0.1), (0.6, 0.7)]
dedans = [p for p in pts if p[0]**2 + p[1]**2 <= 1]
print(len(dedans), 4 * len(dedans) / len(pts))
```

Déterminer la liste `dedans` et les deux valeurs affichées. Comment obtenir en une ligne la liste de n points tirés au hasard dans le carré?