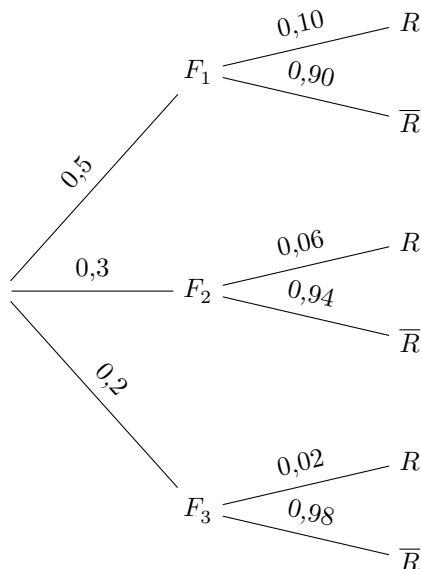


Corrigé : Probabilités conditionnelles et indépendance

Fiche Standard

S1.

1. Arbre : trois branches au premier niveau ($F_1 : 0,5$; $F_2 : 0,3$; $F_3 : 0,2$), puis deux branches par nœud : R avec les probabilités 0,10, 0,06, 0,02 et $\bar{R}$ avec 0,90, 0,94, 0,98.



2. Les événements F_1, F_2, F_3 sont deux à deux incompatibles et $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$: ils forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R) = 0,5 \times 0,10 + 0,3 \times 0,06 + 0,2 \times 0,02 = 0,05 + 0,018 + 0,004 = 0,072.$$

3. $P_R(F_k) = \frac{P(F_k \cap R)}{P(R)}$:

$$P_R(F_1) = \frac{0,05}{0,072} = \frac{25}{36}, \quad P_R(F_2) = \frac{0,018}{0,072} = \frac{1}{4}, \quad P_R(F_3) = \frac{0,004}{0,072} = \frac{1}{18}.$$

Vérification : $\frac{25}{36} + \frac{9}{36} + \frac{2}{36} = 1.$

Conclusion : un client qui résilie a eu le forfait F_1 avec la probabilité $\frac{25}{36}$ (environ 69 %).

4. Chaque client résilie avec la probabilité 0,072, indépendamment des autres. Le contraire de « au moins un résilie » est « aucun ne résilie » :

$$P = 1 - (1 - 0,072)^3 = 1 - 0,928^3 \approx 1 - 0,7992 = 0,2008.$$

Conclusion : la probabilité est environ 0,201.

S2.

1. A et $\bar{A}$ forment une partition, avec $P(A) = x$ et $P(\bar{A}) = 1 - x$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = x \times 0,7 + (1 - x) \times 0,3 = 0,3 + 0,4x.$$

2. $0,3 + 0,4x = 0,46 \iff 0,4x = 0,16 \iff x = 0,4.$

3. $P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,4 \times 0,7}{0,46} = \frac{0,28}{0,46} = \frac{14}{23} \approx 0,61.$

4. $P(A \cap S) = 0,7x$ et $P(A) \times P(S) = x(0,3 + 0,4x)$. Comme $x \neq 0$:

$$0,7x = x(0,3 + 0,4x) \iff 0,7 = 0,3 + 0,4x \iff x = 1.$$

Or $x \in]0; 1[$, donc l'égalité est impossible.

Conclusion : pour aucune valeur de x dans $]0; 1[$, A et S ne sont indépendants (les deux menus n'ont pas la même probabilité de satisfaction).

S3.

1. A : somme paire (même parité des deux dés), donc $\text{Card}(A) = 3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$ et $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. B : les couples $(6; b)$, donc $\text{Card}(B) = 6$ et $P(B) = \frac{1}{6}$. C : sommes 9 (4 couples), 10 (3), 11 (2), 12 (1), donc $\text{Card}(C) = 10$ et $P(C) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.
2. $A \cap B$: le dé rouge donne 6 et le dé bleu donne un nombre pair (2, 4 ou 6), soit 3 couples. $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ et $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. **A et B sont indépendants.**
3. $B \cap C$: le dé rouge donne 6 et le bleu au moins 3, soit 4 couples. $P(B \cap C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ et $P(B)P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{18} = \frac{5}{108}$. Comme $\frac{12}{108} \neq \frac{5}{108}$, **B et C ne sont pas indépendants.**
4. $A \cap C$: somme paire supérieure ou égale à 9, c'est-à-dire 10 (3 couples) ou 12 (1 couple), soit 4 couples. $P(A \cap C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ et $P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{18} = \frac{5}{36}$. Comme $\frac{4}{36} \neq \frac{5}{36}$, **A et C ne sont pas indépendants.**
5. $P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{4/36}{10/36} = \frac{2}{5}$ et $P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{4/36}{6/36} = \frac{2}{3}$. Les deux probabilités ont le même numérateur mais pas le même dénominateur ($P(C) \neq P(B)$), donc elles diffèrent.
6. A et B sont indépendants, donc $\bar{A}$ et B le sont aussi (propriété du cours). Ainsi $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.
Vérification : $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$.

S4.

1. Sur 10 000 personnes : 100 malades (1 %) et 9 900 non malades. Parmi les malades, $0,95 \times 100 = 95$ sont positifs et 5 négatifs. Parmi les non malades, $0,05 \times 9 900 = 495$ sont positifs et 9 405 négatifs.

	T	$\bar{T}$	Total
M	95	5	100
$\bar{M}$	495	9 405	9 900
Total	590	9 410	10 000

$$P_T(M) = \frac{95}{590} = \frac{19}{118} \approx 0,16.$$

2. M et $\bar{M}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = 0,95p + 0,05(1 - p) = 0,9p + 0,05.$$

$$\text{Comme } P(M \cap T) = 0,95p, \text{ on obtient } P_T(M) = \frac{0,95p}{0,9p + 0,05}.$$

3. $\frac{0,95p}{0,9p + 0,05} = 0,5 \iff 0,95p = 0,45p + 0,025 \iff 0,5p = 0,025 \iff p = 0,05$ (le dénominateur est strictement positif).
4. Pour $p = 0,2$: $P_T(M) = \frac{0,19}{0,18 + 0,05} = \frac{19}{23} \approx 0,83$.

Conclusion : plus la maladie est rare, moins un test positif est fiable (0,16 pour $p = 0,01$, 0,5 pour $p = 0,05$, 0,83 pour $p = 0,2$).

S5.

1. Il y a $10 \times 9 = 90$ tirages ordonnés équiprobables. Deux rouges : $3 \times 2 = 6$; deux noires : $4 \times 3 = 12$; deux blanches : $3 \times 2 = 6$. Total : 24.

$$P = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}.$$

2. $P(R_1) = \frac{3}{10}$, $P(N_1) = \frac{4}{10}$, $P(B_1) = \frac{3}{10}$ forment une partition. Après un premier tirage, il reste 9 boules : $P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{9}$, $P_{N_1}(R_2) = \frac{3}{9}$, $P_{B_1}(R_2) = \frac{3}{9}$. Donc

$$P(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{6 + 12 + 9}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}.$$

3. $P_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{6/90}{3/10} = \frac{1}{15} \times \frac{10}{3} = \frac{2}{9}$.

4. $P(R_1)P(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$ et $P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{15}$. Comme $\frac{9}{100} \neq \frac{1}{15}$ ($0,09 \neq 0,067$ environ), R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.

5. Avec remise, les tirages sont indépendants et chaque couleur garde ses probabilités : $P = \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9 + 16 + 9}{100} = \frac{17}{50} = 0,34$.

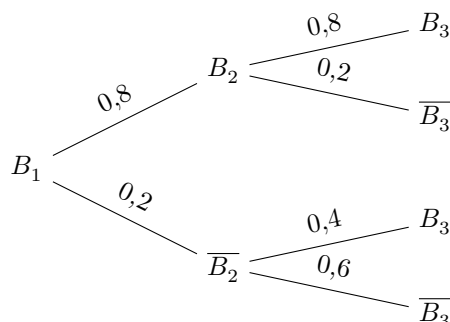
Conclusion : $\frac{4}{15} \approx 0,267$ sans remise et 0,34 avec remise : sans remise, la couleur déjà tirée est moins présente dans l'urne.

S6.

1. Arbre à trois niveaux : à chaque nœud, T (cible touchée) avec la probabilité 0,4 et $\bar{T}$ avec 0,6. Les huit chemins sont TTT , $TT\bar{T}$, $T\bar{T}T$, $T\bar{T}\bar{T}$, $\bar{T}TT$, $\bar{T}T\bar{T}$, $\bar{T}\bar{T}T$, $\bar{T}\bar{T}\bar{T}$.
2. Les lancers sont indépendants : $P(X = 0) = 0,6^3 = 0,216$ et $P(X = 3) = 0,4^3 = 0,064$.
3. Trois chemins ont exactement un succès ($T\bar{T}\bar{T}$, $\bar{T}T\bar{T}$, $\bar{T}\bar{T}T$), chacun de probabilité $0,4 \times 0,6^2 = 0,144$. Donc $P(X = 1) = 3 \times 0,144 = 0,432$.
De même, trois chemins ont exactement deux succès, chacun de probabilité $0,4^2 \times 0,6 = 0,096$: $P(X = 2) = 3 \times 0,096 = 0,288$.
Vérification : $0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1$.
4. $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,288 + 0,064 = 0,352$.
5. $0,6^n$ est la probabilité de manquer la cible n fois de suite, donc $1 - 0,6^n$ est la probabilité de toucher la cible au moins une fois en n lancers. Le programme cherche le plus petit n tel que cette probabilité soit au moins égale à 0,99, c'est-à-dire $0,6^n \leq 0,01$.
Or $0,6^9 \approx 0,01008 > 0,01$ et $0,6^{10} \approx 0,00605 \leq 0,01$; comme $0,6^n$ décroît quand n augmente, le programme affiche 10.

S7.

1. Le jour 1 est beau. Jour 2 : B_2 avec 0,8, $\bar{B}_2$ avec 0,2. Jour 3 : après B_2 , B_3 avec 0,8 ; après $\bar{B}_2$, B_3 avec 0,4.



$u_2 = 0,8$. Avec la partition $\{B_2; \bar{B}_2\}$: $u_3 = 0,8 \times 0,8 + 0,2 \times 0,4 = 0,64 + 0,08 = 0,72$.

$$2. P_{B_3}(B_2) = \frac{P(B_2 \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{0,8 \times 0,8}{0,72} = \frac{0,64}{0,72} = \frac{8}{9} \approx 0,89.$$

3. B_n et $\overline{B_n}$ forment une partition, avec $P(B_n) = u_n$ et $P(\overline{B_n}) = 1 - u_n$. D'après la formule des probabilités totales,

$$u_{n+1} = 0,8 u_n + 0,4 (1 - u_n) = 0,4 u_n + 0,4.$$

$$4. v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = 0,4 u_n + 0,4 - \frac{2}{3} = 0,4 u_n - \frac{4}{15} = 0,4 \left(u_n - \frac{2}{3} \right) = 0,4 v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,4 et de premier terme $v_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ainsi

$$v_n = \frac{1}{3} \times 0,4^{n-1} \text{ et}$$

$$u_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,4^{n-1}.$$

$$\text{Vérification : } u_2 = \frac{2}{3} + \frac{0,4}{3} = 0,8 \text{ et } u_3 = \frac{2}{3} + \frac{0,16}{3} = 0,72.$$

5. On cherche $\frac{1}{3} \times 0,4^{n-1} < 0,001$, soit $0,4^{n-1} < 0,003$. La calculatrice donne $0,4^6 = 0,004096$ (trop grand) et $0,4^7 = 0,0016384$. Donc $n - 1 = 7$.

Conclusion : le plus petit entier est $n = 8$ (la probabilité de beau temps se stabilise près de $\frac{2}{3}$).

S8.

- On a $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, et ces deux événements sont incompatibles (l'un est inclus dans A , l'autre dans $\overline{A}$). Donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$, d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.
- Par indépendance de A et B , $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Donc

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1 - P(A)] = P(\overline{A})P(B).$$

Conclusion : $\overline{A}$ et B sont indépendants.

3. $P(\overline{A} \cap B) = 0,65 \times 0,6 = 0,39$.

A et B sont indépendants, donc $\overline{A}$ et B le sont. En appliquant le résultat précédent à la paire $(B; \overline{A})$ (les rôles sont symétriques), $\overline{B}$ et $\overline{A}$ sont indépendants. Ainsi $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,65 \times 0,4 = 0,26$.

4. $A \cup B$ est le contraire de $\overline{A} \cap \overline{B}$: $P(A \cup B) = 1 - 0,26 = 0,74$.

$$\text{Vérification : } P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,35 + 0,6 - 0,35 \times 0,6 = 0,95 - 0,21 = 0,74.$$

S9.

- Le programme compte les lancers où la somme est supérieure ou égale à 8 (**na**), puis, parmi eux, ceux où un dé affiche 6 (**nab**). Il approche $P_A(B)$. On divise par **na** car on se place dans l'univers restreint à A : le dénominateur d'une probabilité conditionnelle est l'événement « sachant ».
- A : sommes 8 (5 couples), 9 (4), 10 (3), 11 (2), 12 (1), soit 15 couples. $A \cap B$: (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6), (6; 6), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), soit 9 couples.

$$P_A(B) = \frac{9/36}{15/36} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

3. B contient $36 - 25 = 11$ couples. Donc $P_B(A) = \frac{9/36}{11/36} = \frac{9}{11} \approx 0,82$.

Pour l'estimer, il faut compter **nb** (les lancers où un dé affiche 6), et, parmi eux, **nab** (ceux où de plus la somme est supérieure ou égale à 8), puis renvoyer **nab** / **nb**. La structure imbriquée est inversée :

```

if d1 == 6 or d2 == 6:
    nb = nb + 1
    if d1 + d2 >= 8:
        nab = nab + 1
return nab / nb
    
```

S10.

1. L'aire du carré est 1 et celle du quart de disque de rayon 1 est $\frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{4}$. Donc $P(Q) = \frac{\pi/4}{1} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$.
 2. a) Le compteur `c` compte les points tombés dans le quart de disque, donc $\frac{c}{n}$ est la fréquence de l'événement Q sur n tirages. Pour n grand, cette fréquence est proche de $P(Q) = \frac{\pi}{4}$, donc $4 \times \frac{c}{n}$ est proche de π .
 b) $4 \times \frac{c}{10\,000} = 3,1448$ donne $c = 7862$ points dans le quart de disque. Les tirages sont aléatoires : deux exécutions donnent en général des valeurs différentes (proches de π mais non identiques).
 c) On remplace la condition par `y <= x * x` et on renvoie `c / n` au lieu de `4 * c / n`. Pour n grand, la fréquence est proche de la probabilité de l'événement, c'est-à-dire de l'aire sous la parabole, soit $\frac{1}{3} \approx 0,333$.
 3. Pour chaque point, $x^2 + y^2$ vaut : $0,04 + 0,81 = 0,85$ pour $(0,2; 0,9)$; $0,49 + 0,64 = 1,13$ pour $(0,7; 0,8)$; $0,25 + 0,25 = 0,5$ pour $(0,5; 0,5)$; $0,81 + 0,01 = 0,82$ pour $(0,9; 0,1)$; $0,36 + 0,49 = 0,85$ pour $(0,6; 0,7)$. Seul $(0,7; 0,8)$ est hors du quart de disque. La liste est donc

$$[(0.2, 0.9), (0.5, 0.5), (0.9, 0.1), (0.6, 0.7)]$$
 et le programme affiche 4 puis $\frac{4 \times 4}{5} = 3,2$. La liste de n points aléatoires s'obtient en compréhension :
`[(random(), random()) for _ in range(n)]`.
- Conclusion :** $P(Q) = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$; $c = 7862$; `dedans` contient quatre points et le programme affiche 4 puis 3,2.