

Probabilités conditionnelles et indépendance

Fiche Défi

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Probabilités totales et formule de Bayes (hors programme)

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements de probabilités non nulles, deux à deux incompatibles et de réunion l'univers (une partition de l'univers), et B un événement.

1. Démontrer que $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)$.
2. (Formule de Bayes, hors programme, pour aller plus loin.) On suppose $P(B) > 0$. En déduire, pour tout k de $\{1; \dots; n\}$, que

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k) P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)}.$$

3. Application. Un voyageur emprunte l'itinéraire I_1 , I_2 ou I_3 avec les probabilités $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Il arrive en retard (R) avec les probabilités 0,2, 0,4 et 0,7 respectivement. Il est arrivé en retard : calculer la probabilité qu'il ait pris chaque itinéraire.
4. La probabilité de retard de l'itinéraire I_3 vaut désormais r (les autres données sont inchangées). Déterminer r pour que R et I_3 soient indépendants.

Exercice D2 : Deux enfants

Une famille a deux enfants. On suppose que chaque enfant est une fille (F) ou un garçon (G) avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment de l'autre. On note le couple (aîné, cadet), par exemple FG .

1. Donner les quatre issues et leur probabilité.
2. On apprend que la famille a au moins une fille. Calculer la probabilité qu'elle ait deux filles.
3. On apprend que l'aîné est une fille. Calculer la probabilité que la famille ait deux filles.
4. Expliquer en deux phrases pourquoi les résultats des questions 2 et 3 sont différents.
5. Les événements « l'aîné est une fille » et « le cadet est une fille » sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice D3 : Le jeu des portes

Dans un jeu, une voiture est placée derrière l'une de trois portes, avec la même probabilité, les deux autres portes cachant une chèvre. Le candidat choisit la porte 1. Le présentateur, qui sait où se trouve la voiture, ouvre alors une des deux autres portes, toujours derrière laquelle il y a une chèvre ; s'il a le choix entre deux portes, il choisit au hasard (probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacune). Le candidat peut garder la porte 1 ou changer pour la dernière porte fermée. On note V_k : « la voiture est derrière la porte k » et O_k : « le présentateur ouvre la porte k ».

1. Donner $P(V_k)$ puis les probabilités conditionnelles $P_{V_1}(O_2)$, $P_{V_1}(O_3)$, $P_{V_2}(O_3)$ et $P_{V_3}(O_2)$.
2. Le présentateur ouvre la porte 3. Calculer $P(O_3)$, puis $P_{O_3}(V_1)$ et $P_{O_3}(V_2)$.
3. Quelle stratégie (garder ou changer) faut-il conseiller ? Justifier.
4. Variante à quatre portes : la voiture est derrière l'une des quatre portes avec la même probabilité, le candidat choisit la porte 1, le présentateur ouvre une des trois autres portes cachant une chèvre (au hasard s'il a le choix), puis le candidat choisit au hasard, avec la même probabilité, l'une des deux portes restées fermées autres que la porte 1. Calculer la probabilité qu'il gagne la voiture et la comparer à celle de la stratégie « garder la porte 1 ».

Exercice D4 : Indépendance et probabilités conditionnelles égales

Soient A et B deux événements avec $0 < P(A) < 1$.

1. Montrer que $P(B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)$.

- On suppose que $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$. Montrer que $P(B) = P_A(B)$, puis que A et B sont indépendants.
- Réciproquement, on suppose A et B indépendants. Montrer que $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$. On pourra utiliser l'indépendance de $\bar{A}$ et B .
- Application. Un test de dépistage est positif (T) avec la même probabilité 0,08 pour une personne malade (M) et pour une personne non malade, la prévalence de la maladie étant 0,02. Que vaut $P_T(M)$? Que peut-on dire de l'utilité de ce test?

Exercice D5 : Retards en covoiturage

Partie A. Sur une plateforme de covoiturage, 70 % des trajets sont assurés par des conducteurs réguliers (R) et 30 % par des conducteurs occasionnels (O). Un trajet est en retard (L) avec la probabilité 0,10 lorsque le conducteur est régulier et 0,30 lorsqu'il est occasionnel. On choisit un trajet au hasard.

- Dessiner l'arbre pondéré et montrer que $P(L) = 0,16$.
- Un trajet est en retard. Calculer la probabilité que le conducteur soit occasionnel.
- Les événements O et L sont-ils indépendants?

Partie B. Un usager effectue quatre trajets, choisis de façon indépendante, chacun étant en retard avec la probabilité 0,16. On note X le nombre de trajets en retard.

- Calculer, au millièmes près, $P(X = 0)$ et $P(X \geq 1)$.
- Montrer que $P(X = 2) = 6 \times 0,16^2 \times 0,84^2$ et donner une valeur approchée au millièmes. On justifiera le coefficient 6.

Partie C. La plateforme veut que la probabilité de retard d'un trajet soit au plus égale à 0,12 en faisant varier la proportion y de trajets assurés par des occasionnels (les probabilités conditionnelles de retard restent 0,10 et 0,30).

- Exprimer $P(L)$ en fonction de y et déterminer les valeurs de y de $[0; 1]$ qui conviennent.

Exercice D6 : Deux tests successifs

Une maladie touche une proportion 0,01 d'une population; on note M : « la personne est malade ». Un test est positif avec la probabilité 0,95 si la personne est malade et 0,05 si elle ne l'est pas. On répète le test sur la même personne. On admet que, l'état de la personne étant fixé (malade ou non), les résultats des tests successifs sont indépendants. On note $T_1, T_2, \dots$ les événements « le premier (resp. deuxième, ...) test est positif ».

- Calculer $P(M \cap T_1 \cap T_2)$ et $P(\bar{M} \cap T_1 \cap T_2)$.
- En déduire $P(T_1 \cap T_2)$, puis $P_{T_1 \cap T_2}(M)$. Comparer avec $P_{T_1}(M)$.
- Les événements T_1 et T_2 sont-ils indépendants? Justifier par un calcul.
- Soit q_n la probabilité d'être malade sachant que les n premiers tests sont positifs. Exprimer q_n en fonction de n .
- Écrire un programme Python qui détermine le plus petit entier n tel que $q_n \geq 0,99$, puis donner la valeur obtenue en justifiant par un calcul.

Exercice D7 : Le problème des anniversaires

Dans un groupe de n personnes ($n \geq 2$), on suppose que chaque anniversaire est équiprobable parmi 365 jours et que les anniversaires sont indépendants. On note E_n : « au moins deux personnes ont leur anniversaire le même jour ».

- Calculer $P(E_2)$. Pour $n = 3$, justifier que $P(\bar{E}_3) = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$ à l'aide d'un arbre ou de probabilités conditionnelles.
- Plus généralement, justifier que $P(\bar{E}_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$.
- On considère la fonction suivante.

```
def proba_commun(n):
    p = 1
```

```

    for k in range(1, n):
        p = p * (1 - k / 365)
    return 1 - p

n = 2
while proba_commun(n) < 0.5:
    n = n + 1
print(n)

```

Que calcule `proba_commun(n)` ? Que cherche à déterminer la boucle `while` ?

4. Le programme affiche 23. Retrouver ce résultat en donnant des valeurs approchées de $P(E_{22})$ et $P(E_{23})$ (calculatrice ou programme).
5. Que renverrait `proba_commun(366)` ? Justifier par le calcul, puis par un argument de principe.

Exercice D8 : Arbre inversé et trois tirages

Partie A. Deux événements A et B vérifient $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,3$.

1. Calculer $P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$. Représenter l'arbre pondéré dont le premier niveau est $A, \bar{A}$.
2. Calculer $P_B(A)$ et $P_{\bar{B}}(A)$. Représenter l'arbre pondéré dont le premier niveau est $B, \bar{B}$.
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Partie B. Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules bleues. On tire successivement et sans remise trois boules. On note R_k l'événement « la k -ième boule tirée est rouge ».

4. Calculer $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$ en justifiant par les probabilités conditionnelles successives.
5. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux boules rouges.
6. Calculer $P(R_3)$ en utilisant la partition associée aux couleurs des deux premières boules.
7. La troisième boule est rouge. Calculer la probabilité que les deux premières le soient aussi.