

Corrigé : Probabilités conditionnelles et indépendance**Fiche Défi****D1.**

1. La réunion des A_i est l'univers, donc $B = (A_1 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$. Les A_i étant deux à deux incompatibles, les événements $A_i \cap B$ le sont aussi. Donc

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B),$$

car $P(A_i \cap B) = P(A_i) P_{A_i}(B)$ (les $P(A_i)$ sont non nuls).

2. Par définition, $P_B(A_k) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) P_{A_k}(B)}{P(B)}$. On remplace $P(B)$ par l'expression de la question 1.
3. $P(R) = \frac{1}{4} \times 0,2 + \frac{1}{4} \times 0,4 + \frac{1}{2} \times 0,7 = 0,05 + 0,1 + 0,35 = 0,5$. Donc

$$P_R(I_1) = \frac{0,05}{0,5} = 0,1, \quad P_R(I_2) = \frac{0,1}{0,5} = 0,2, \quad P_R(I_3) = \frac{0,35}{0,5} = 0,7.$$

Vérification : $0,1 + 0,2 + 0,7 = 1$.

4. Avec $r : P(R) = 0,05 + 0,1 + 0,5r = 0,15 + 0,5r$ et $P(I_3 \cap R) = 0,5r$. L'indépendance de R et I_3 s'écrit

$$0,5r = 0,5(0,15 + 0,5r) \iff r = 0,15 + 0,5r \iff r = 0,3.$$

Conclusion : R et I_3 sont indépendants si et seulement si $r = 0,3$. Vérification : $P(R) = 0,15 + 0,15 = 0,3 = r$.

D2.

1. Les issues FF, FG, GF, GG ont chacune la probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (indépendance).
2. Soit $A : \text{« au moins une fille »} = \{FF; FG; GF\}$, $P(A) = \frac{3}{4}$. Alors $P_A(FF) = \frac{P(FF)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$.
3. Soit $B : \text{« l'aîné est une fille »} = \{FF; FG\}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Alors $P_B(FF) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$.
4. Les deux informations ne restreignent pas l'univers de la même façon : « au moins une fille » conserve trois issues équiprobables, dont une seule est FF , tandis que « l'aîné est une fille » n'en conserve que deux (le cadet est alors libre). Le conditionnement porte sur des événements différents.
5. Soit $F_1 : \text{« l'aîné est une fille »}$ et $F_2 : \text{« le cadet est une fille »}$. $P(F_1) = P(F_2) = \frac{1}{2}$ et $P(F_1 \cap F_2) = P(FF) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

Conclusion : F_1 et F_2 sont indépendants.

D3.

1. $P(V_1) = P(V_2) = P(V_3) = \frac{1}{3}$. Si la voiture est derrière la porte 1, le présentateur choisit au hasard entre les portes 2 et 3 : $P_{V_1}(O_2) = P_{V_1}(O_3) = \frac{1}{2}$. Si la voiture est derrière la porte 2, il ne peut ouvrir que la porte 3 : $P_{V_2}(O_3) = 1$. De même $P_{V_3}(O_2) = 1$.
2. V_1, V_2, V_3 forment une partition. Or $P_{V_3}(O_3) = 0$ (il n'ouvre jamais la porte de la voiture). D'après la formule des probabilités totales,

$$P(O_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Puis } P_{O_3}(V_1) = \frac{P(V_1 \cap O_3)}{P(O_3)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \text{ et } P_{O_3}(V_2) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

3. Si le présentateur ouvre la porte 3, garder la porte 1 fait gagner avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et changer pour la porte 2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$. **Il faut conseiller de changer.** Le cas où il ouvre la porte 2 est symétrique.
4. Garder la porte 1 : probabilité $\frac{1}{4}$. Si la voiture est derrière la porte 1 (probabilité $\frac{1}{4}$), changer fait perdre. Sinon (probabilité $\frac{3}{4}$), la voiture est derrière une des portes 2, 3, 4 ; le présentateur ouvre une porte avec une chèvre parmi les deux autres, et les deux portes fermées restantes autres que la porte 1 sont : la porte de la voiture et une porte avec une chèvre. Le candidat choisit la voiture avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Donc

$$P(\text{gagner en changeant}) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Conclusion : $\frac{3}{8} > \frac{1}{4}$, donc changer reste avantageux.

D4.

1. A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers (leurs probabilités sont non nulles). La formule des probabilités totales donne le résultat.
2. Notons $c = P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$. Alors $P(B) = P(A)c + P(\bar{A})c = c[P(A) + P(\bar{A})] = c$. Donc $P_A(B) = P(B)$, c'est-à-dire $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$, soit $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

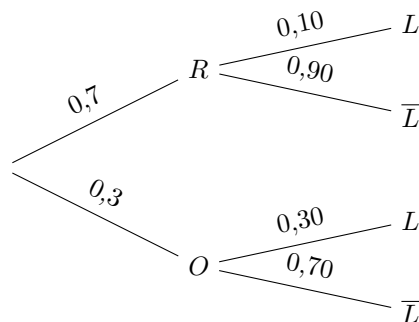
Conclusion : A et B sont indépendants.

3. Si A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, donc $P_A(B) = P(B)$. Comme $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants (propriété du cours) et $P(\bar{A}) \neq 0$, on a de même $P_{\bar{A}}(B) = P(B)$. Ainsi $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$.
4. Ici $P_M(T) = P_{\bar{M}}(T) = 0,08$, donc T et M sont indépendants d'après la question 2, et $P_T(M) = P(M) = 0,02$. (Directement : $P(T) = 0,02 \times 0,08 + 0,98 \times 0,08 = 0,08$ et $P_T(M) = \frac{0,0016}{0,08} = 0,02$.)

Conclusion : le résultat du test ne modifie pas la probabilité d'être malade, le test est inutile.

D5.

1. Arbre : R (0,7) puis L (0,10) ou $\bar{L}$ (0,90) ; O (0,3) puis L (0,30) ou $\bar{L}$ (0,70).



R et O forment une partition. D'après la formule des probabilités totales, $P(L) = 0,7 \times 0,10 + 0,3 \times 0,30 = 0,07 + 0,09 = 0,16$.

2. $P_L(O) = \frac{P(O \cap L)}{P(L)} = \frac{0,09}{0,16} = \frac{9}{16} = 0,5625$.
3. $P(O)P(L) = 0,3 \times 0,16 = 0,048 \neq 0,09 = P(O \cap L)$. **O et L ne sont pas indépendants.** (De façon équivalente, $P_O(L) = 0,3 \neq P(L) = 0,16$.)
4. Les trajets sont indépendants : $P(X = 0) = 0,84^4 \approx 0,4979 \approx 0,498$. Par l'événement contraire, $P(X \geq 1) = 1 - 0,84^4 \approx 0,502$.

5. Exactement deux trajets en retard : les chemins de l'arbre à quatre niveaux contenant deux L et deux $\bar{L}$ sont $LL\bar{L}\bar{L}$, $L\bar{L}LL$, $L\bar{L}\bar{L}L$, $\bar{L}LL\bar{L}$, $\bar{L}L\bar{L}L$, $\bar{L}\bar{L}LL$: il y en a 6 (position des deux retards parmi les quatre trajets). Chacun a pour probabilité $0,16^2 \times 0,84^2$. Donc

$$P(X = 2) = 6 \times 0,16^2 \times 0,84^2 = 6 \times 0,0256 \times 0,7056 \approx 0,1084 \approx 0,108.$$

6. Avec la proportion y d'occasionnels, $P(O) = y$ et $P(R) = 1 - y$. Alors

$$P(L) = (1 - y) \times 0,10 + y \times 0,30 = 0,1 + 0,2y.$$

$$0,1 + 0,2y \leq 0,12 \iff y \leq 0,1.$$

Conclusion : il faut que $y \in [0; 0,1]$, c'est-à-dire au plus 10 % de conducteurs occasionnels.

D6.

- Par la règle du produit, puis l'indépendance conditionnelle admise : $P(M \cap T_1 \cap T_2) = 0,01 \times 0,95 \times 0,95 = 0,009025$ et $P(\bar{M} \cap T_1 \cap T_2) = 0,99 \times 0,05 \times 0,05 = 0,002475$.
- M et $\bar{M}$ forment une partition : $P(T_1 \cap T_2) = 0,009025 + 0,002475 = 0,0115$. Donc

$$P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{0,009025}{0,0115} = \frac{361}{460} \approx 0,785.$$

Pour un seul test, $P_{T_1}(M) = \frac{0,0095}{0,059} = \frac{19}{118} \approx 0,161$. Un second test positif fait passer la probabilité d'être malade d'environ 16 % à environ 78,5 %.

- $P(T_1) = 0,01 \times 0,95 + 0,99 \times 0,05 = 0,0095 + 0,0495 = 0,059$, et de même $P(T_2) = 0,059$. Alors $P(T_1)P(T_2) = 0,059^2 = 0,003481$, alors que $P(T_1 \cap T_2) = 0,0115$.

Conclusion : T_1 et T_2 ne sont pas indépendants (ils ne le sont que conditionnellement à l'état de la personne).

- Par la règle du produit et les probabilités totales, avec n tests positifs :

$$q_n = \frac{0,01 \times 0,95^n}{0,01 \times 0,95^n + 0,99 \times 0,05^n} = \frac{19^n}{19^n + 99}.$$

(On divise numérateur et dénominateur par $0,01 \times 0,05^n$, ce qui donne 19^n et $\frac{0,99}{0,01} = 99$.) Vérification :

$$q_1 = \frac{19}{118} \text{ et } q_2 = \frac{361}{460}.$$

- Programme :

```
n = 1
while 19**n / (19**n + 99) < 0.99:
    n = n + 1
print(n)
```

On a $q_3 = \frac{6\,859}{6\,859 + 99} = \frac{6\,859}{6\,958} \approx 0,9858 < 0,99$ et $q_4 = \frac{130\,321}{130\,321 + 99} \approx 0,9992 \geq 0,99$. La suite (q_n) étant croissante (le quotient $\frac{99}{19^n}$ décroît), **le programme affiche 4**.

D7.

- $P(E_2) = \frac{1}{365}$: la deuxième personne doit avoir le même anniversaire que la première. Pour $n = 3$, $\bar{E}_3$ signifie que les trois dates sont distinctes. La deuxième personne évite la date de la première avec la probabilité $\frac{364}{365}$. Sachant cela, deux dates sont prises, et la troisième les évite avec la probabilité $\frac{363}{365}$. Le produit des probabilités le long du chemin donne $P(\bar{E}_3) = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$.
- Les personnes sont considérées une à une. Sachant que les $k - 1$ premières ont des dates distinctes (déjà $k - 1$ dates prises), la k -ième évite ces dates avec la probabilité $\frac{365 - (k - 1)}{365} = 1 - \frac{k - 1}{365}$. Le

chemin « toutes distinctes » a pour probabilité le produit de ces probabilités pour $k = 2, \dots, n$, soit, avec le changement d'indice $k \rightarrow k + 1$,

$$P(\overline{E_n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

3. `proba_commun(n)` calcule $1 - P(\overline{E_n}) = P(E_n)$: le produit `p` vaut $P(\overline{E_n})$. La boucle `while` cherche le plus petit n tel que $P(E_n) \geq 0,5$, c'est-à-dire la taille minimale du groupe pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux que deux personnes partagent leur anniversaire.
4. $P(E_{22}) \approx 0,4757 < 0,5$ et $P(E_{23}) \approx 0,5073 \geq 0,5$. Comme $P(E_n)$ augmente avec n (on multiplie $P(\overline{E_n})$ par un facteur inférieur à 1 pour passer de n à $n + 1$), le **programme affiche 23**.
5. Pour $n = 366$, le produit contient le facteur $k = 365$:

$$1 - \frac{365}{365} = 0.$$

Donc `p` vaut 0 et `proba_commun(366)` renvoie 1. En principe, parmi 366 personnes pour 365 dates possibles, deux personnes partagent forcément une date (principe des tiroirs) : $P(E_{366}) = 1$.

D8.

1. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$. Comme $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,1$ et $P(\overline{A}) = 0,5$, on a $P_{\overline{A}}(B) = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$.
Arbre : A (0,5) puis B (0,6) ou $\overline{B}$ (0,4) ; $\overline{A}$ (0,5) puis B (0,2) ou $\overline{B}$ (0,8).
2. $P_B(A) = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$. Comme $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,2$ et $P(\overline{B}) = 0,6$, on a $P_{\overline{B}}(A) = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$.
Arbre : B (0,4) puis A (0,75) ou $\overline{A}$ (0,25) ; $\overline{B}$ (0,6) puis A ($\frac{1}{3}$) ou $\overline{A}$ ($\frac{2}{3}$).
Vérification : $P(A) = 0,4 \times 0,75 + 0,6 \times \frac{1}{3} = 0,3 + 0,2 = 0,5$.
3. $P(A)P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2 \neq 0,3 = P(A \cap B)$.
Conclusion : A et B ne sont pas indépendants (de façon équivalente, $P_A(B) = 0,6 \neq P(B) = 0,4$).
4. Il reste 7 boules après le premier tirage et 6 après le deuxième. Par la règle du produit appliquée successivement,

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{60}{336} = \frac{5}{28}.$$

5. Trois chemins conviennent : $R_1 R_2 \overline{R_3}$, $R_1 \overline{R_2} R_3$ et $\overline{R_1} R_2 R_3$. Leurs probabilités sont

$$\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{28}, \quad \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{28}, \quad \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{28}.$$

Conclusion : la probabilité d'obtenir exactement deux boules rouges est $3 \times \frac{5}{28} = \frac{15}{28}$.

6. Les événements $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cap \overline{R_2}$, $\overline{R_1} \cap R_2$ et $\overline{R_1} \cap \overline{R_2}$ forment une partition de l'univers. Avec $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$, la formule des probabilités totales donne

$$P(R_3) = \frac{5}{28} + \frac{5}{28} + \frac{5}{28} + \frac{5}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}.$$

On retrouve la probabilité de R_1 : l'ordre du tirage ne change pas la probabilité d'une couleur donnée.

7. $P_{R_3}(R_1 \cap R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_3)} = \frac{5/28}{5/8} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$.