

Corrigé : Probabilités conditionnelles et indépendance**Fiche Bases****B1.**

1. Les adultes sont au nombre de 120, dont 54 empruntent du numérique : $120 - 54 = 66$ adultes n'en empruntent pas. Les non-adultes sont $240 - 120 = 120$, dont $126 - 54 = 72$ empruntent du numérique et $120 - 72 = 48$ n'en empruntent pas.

	N	$\bar{N}$	Total
A	54	66	120
$\bar{A}$	72	48	120
Total	126	114	240

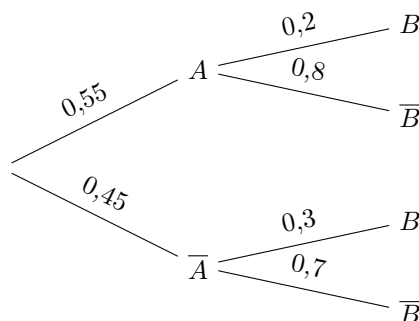
2. $P(A) = \frac{120}{240} = 0,5$, $P(N) = \frac{126}{240} = \frac{21}{40} = 0,525$ et $P(A \cap N) = \frac{54}{240} = \frac{9}{40} = 0,225$.
3. $P_A(N) = \frac{54}{120} = 0,45$ et $P_N(A) = \frac{54}{126} = \frac{3}{7} \approx 0,43$.
 Parmi les adultes, 45 % empruntent des documents numériques. Parmi les abonnés qui empruntent du numérique, $\frac{3}{7}$ (environ 43 %) sont des adultes.
4. $P(A) \times P(N) = 0,5 \times 0,525 = 0,2625$ et $P(A \cap N) = 0,225$. Ces deux valeurs sont différentes.
Conclusion : A et N ne sont pas indépendants.

B2.

1. a) $P(A) = 0,3$; b) $P_A(C) = 0,8$; c) $P_C(A) = 0,4$.
2. $P(\bar{A} \cap C)$: probabilité qu'un client ne soit pas abonné et paie par carte. $P_{\bar{A}}(C)$: probabilité qu'un client paie par carte sachant qu'il n'est pas abonné (parmi les non-abonnés).
3. $P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.
 Par définition, $P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$, donc $P(C) = \frac{P(A \cap C)}{P_C(A)} = \frac{0,24}{0,4} = 0,6$.
4. C est la réunion disjointe de $A \cap C$ et $\bar{A} \cap C$, donc $P(\bar{A} \cap C) = P(C) - P(A \cap C) = 0,6 - 0,24 = 0,36$.
Conclusion : $P(A \cap C) = 0,24$, $P(C) = 0,6$ et $P(\bar{A} \cap C) = 0,36$.

B3.

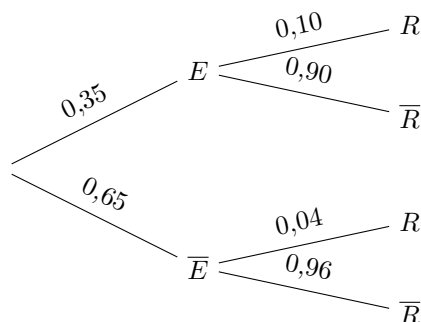
1. Les branches issues d'un même nœud ont une somme égale à 1 : $P(\bar{A}) = 1 - 0,55 = 0,45$; $P_A(\bar{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$; $P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0,7 = 0,3$.



2. $P(A \cap B) = 0,55 \times 0,2 = 0,11$; $P(A \cap \bar{B}) = 0,55 \times 0,8 = 0,44$; $P(\bar{A} \cap B) = 0,45 \times 0,3 = 0,135$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,45 \times 0,7 = 0,315$.
 Vérification : $0,11 + 0,44 + 0,135 + 0,315 = 1$.
3. A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,11 + 0,135 = 0,245$.
Conclusion : $P(B) = 0,245$.

B4.

1. Arbre : $P(E) = 0,35$, $P(\bar{E}) = 0,65$; de E partent R (probabilité 0,10) et $\bar{R}$ (0,90) ; de $\bar{E}$ partent R (0,04) et $\bar{R}$ (0,96).



2. $P(E \cap R) = 0,35 \times 0,10 = 0,035$ et $P(\bar{E} \cap R) = 0,65 \times 0,04 = 0,026$.
 3. E et $\bar{E}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, $P(R) = P(E \cap R) + P(\bar{E} \cap R) = 0,035 + 0,026 = 0,061$.
 4. $P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 0,939$.

Conclusion : 6,1 % des vélos vendus sont retournés sous garantie.

B5.

1. $P(F \cap A) = P(F) \times P_F(A) = 0,01 \times 0,9 = 0,009$.
 2. F et $\bar{F}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A) = 0,009 + P(\bar{F}) P_{\bar{F}}(A) = 0,009 + 0,99 \times 0,03 = 0,0387.$$

3. $P_A(F) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{0,009}{0,0387} = \frac{90}{387} = \frac{10}{43} \approx 0,23$.
 4. $P_A(\bar{F}) = 1 - \frac{10}{43} = \frac{33}{43} \approx 0,77$.

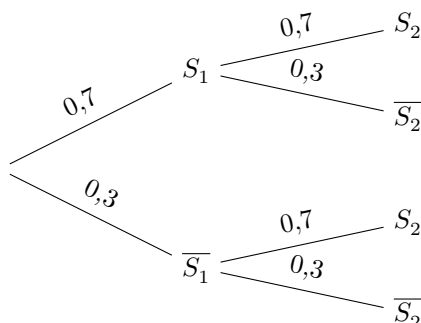
Conclusion : environ 77 % des alertes ne correspondent pas à une fraude, car les transactions frauduleuses sont rares.

B6.

1. **Vrai.** $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2 = P(A \cap B)$.
 2. **Faux.** Comme A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$, alors que $P(A) \times P(B) = 0,06 \neq 0$. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.
 3. **Faux.** $P_A(B) = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$ et $P_B(A) = \frac{0,1}{0,25} = 0,4$.
 4. **Faux.** La formule des probabilités totales donne $P(B) = 0,4 \times 0,5 + 0,6 \times 0,2 = 0,2 + 0,12 = 0,32$. Il faut pondérer par $P(A)$ et $P(\bar{A})$; la somme 0,7 n'a pas de sens.

B7.

1. Arbre à deux niveaux : de chaque nœud partent S (probabilité 0,7) et $\bar{S}$ (probabilité 0,3).



2. Les tirs sont indépendants : $P(S_1 \cap S_2) = 0,7 \times 0,7 = 0,49$.
3. Deux chemins conviennent : $P = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 = 0,42$.
4. Le contraire de « au moins un lancer réussi » est « aucun lancer réussi » : $P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$.
Donc $P = 1 - 0,09 = 0,91$.
Vérification : $0,49 + 0,42 + 0,09 = 1$.
5. Les deux lancers étant indépendants, chaque case est le produit des probabilités des deux événements.

	S_2	$\overline{S_2}$	Total
S_1	0,49	0,21	0,7
$\overline{S_1}$	0,21	0,09	0,3
Total	0,7	0,3	1

Le total de la ligne S_1 est $P(S_1) = 0,7$ et celui de la colonne S_2 est $P(S_2) = 0,7$: on retrouve les probabilités de départ. De plus $P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \times P(S_2)$ dans toutes les cases, ce qui traduit l'indépendance. La probabilité de réussir exactement un lancer est $0,21 + 0,21 = 0,42$.

B8.

1. $P(R_1) = \frac{4}{10} = 0,4$. Après un premier tirage rouge, il reste 3 rouges sur 9 boules : $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
2. $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$.
3. R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition. On a $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{4}{9}$ (il reste 4 rouges sur 9 boules). Donc $P(R_2) = \frac{4}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{90} + \frac{24}{90} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$.
4. $P(R_1) \times P(R_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ et $P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{15}$. Comme $\frac{4}{25} \neq \frac{2}{15}$ (dénominateur commun 75 : $\frac{12}{75} \neq \frac{10}{75}$),
 R_1 et R_2 **ne sont pas indépendants** (la composition de l'urne change après le premier tirage).

B9.

1. `essai()` répète 3 fois, de façon indépendante, une épreuve qui réussit avec la probabilité 0,2. Elle renvoie `True` si l'on obtient au moins un succès.
2. Le contraire est « aucun succès » : $0,8^3 = 0,512$. La probabilité cherchée est $1 - 0,512 = 0,488$.
3. Chaque appel utilise de nouveaux nombres aléatoires : la fréquence observée fluctue autour de 0,488. Elle est en général plus stable quand n est grand.
4. Il faut remplacer `return succes >= 1` par `return succes == 1`. La probabilité exacte est $3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,384$ (trois chemins, chacun de probabilité $0,2 \times 0,8^2$).