

Fiche 3 : indépendance et problèmes

Neuf exercices pour maîtriser l'**indépendance**, les **successions d'épreuves** et les **épreuves de Bernoulli** :

- vérifier l'**indépendance** avec un tableau ;
- deux **lancers de dés** indépendants ;
- un **paramètre** pour que deux événements soient indépendants ;
- deux épreuves de **natures différentes** : arbre et **tableau à double entrée** ;
- épreuves **identiques** ou **indépendantes** ? ;
- **trois épreuves** de Bernoulli et arbre ;
- **quatre épreuves** de Bernoulli et **chemins à k succès** ;
- **simulation** Monte-Carlo en Python ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- l'indépendance est **prouvée par le calcul** de $P(A \cap B)$ et $P(A)P(B)$;
- chaque **hypothèse d'indépendance** est citée ;
- « au moins un » passe par le **contraire**.

Le modèle de rédaction pour l'indépendance

« $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$. Donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$: A et B sont indépendants. »

- **Calcule** les deux membres séparément.
- **Compare** et conclus avec la définition.

Les pièges classiques

- Conclure à l'indépendance sans calculer.
- Confondre **incompatibles** et **indépendants**.
- Oublier de citer l'**hypothèse d'indépendance** pour multiplier.
- Utiliser un modèle **avec remise** pour un tirage sans remise.

Deux événements indépendants ne s'ignorent pas par politesse : c'est une propriété qui se vérifie par le calcul, pas par l'impression.

Exercice 1 (★) : vérifier l'indépendance

Dans deux populations, on a relevé les effectifs suivants pour deux événements A et B :

Population 1	B	$\overline{B}$
A	30	20
$\overline{A}$	60	40

Population 2	B	$\overline{B}$
A	40	10
$\overline{A}$	30	20

1. Dans la population 1, A et B sont-ils indépendants ?
2. Même question dans la population 2.

Exercice 2 (★) : deux lancers de dés

On lance deux fois un dé équilibré à six faces. Les deux lancers sont indépendants.

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux 6.
2. Calculer la probabilité d'obtenir **au moins un 6**.
3. Calculer la probabilité que la somme soit égale à 7.

Exercice 3 (★★) : un paramètre

Deux événements indépendants A et B vérifient $P(A) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,7$. On note $x = P(B)$.

1. Écrire $P(A \cup B)$ en fonction de x .
2. En déduire x .
3. Vérifier que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Exercice 4 (★★) : une urne puis un dé

On tire une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules bleues, puis, **indépendamment**, on lance un dé équilibré. On note R : « la boule est rouge » et S : « le dé donne 6 ».

1. Représenter la succession des deux épreuves par un arbre pondéré et calculer la probabilité de chaque chemin.
2. Compléter le tableau à double entrée.

	S	$\bar{S}$	Total
R	...	...	$\frac{2}{5}$
B (bleue)	...	...	$\frac{3}{5}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge **ou** un 6, de deux façons.
4. Sachant que le dé donne 6, calculer la probabilité que la boule soit rouge. Que constate-t-on ? Pourquoi cela justifie-t-il de multiplier sur l'arbre ?

Exercice 5 (★★) : identiques ou indépendantes ?

Pour chaque situation, dire si les deux épreuves sont **indépendantes**, si elles sont **identiques**, et si l'on peut parler de **schéma de Bernoulli**.

- (a) On lance deux fois le même dé équilibré. Le succès est « obtenir 6 ».
- (b) Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire deux boules **sans remise**. Le succès est « la boule est rouge ».
- (c) Un tireur effectue deux tirs indépendants : le premier, de loin, est réussi avec la probabilité 0,4 ; le second, de près, avec la probabilité 0,9.
- (d) Un joueur réussit son premier tir avec la probabilité 0,6. Il réussit le deuxième avec la probabilité 0,8 s'il a réussi le premier, 0,5 sinon.

Pour chaque situation, calculer ensuite la probabilité demandée : (a) deux succès ; (b) deux boules rouges ; (c) **exactement un** succès ; (d) deux succès.

Exercice 6 (★★) : trois tirs

Un tireur réussit chaque tir avec la probabilité $0,7$. Les trois tirs sont indépendants. On note S le succès.

1. Dessiner l'arbre pondéré des trois tirs.
2. Calculer la probabilité de réussir les trois tirs.
3. Calculer la probabilité de réussir **exactement deux** tirs.
4. Calculer la probabilité de réussir **au moins un** tir.
5. Justifier, en citant l'indépendance, que le chemin $SS\bar{S}$ a pour probabilité $0,7 \times 0,7 \times 0,3$.
6. Donner la probabilité de 0, 1, 2 et 3 succès et vérifier que la somme vaut 1.

Exercice 7 (★★) : quatre pièces

Une machine fabrique des pièces, chacune défectueuse avec la probabilité $0,1$, indépendamment des autres. On prélève 4 pièces. On note D « la pièce est défectueuse » (succès).

1. Justifier qu'il s'agit de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Représenter l'arbre.
2. Combien de chemins contiennent exactement 0, 1, 2, 3 ou 4 pièces défectueuses ?
3. Calculer la probabilité d'avoir exactement 0, 1 puis 2 pièces défectueuses.
4. Calculer la probabilité d'avoir **au moins une** pièce défectueuse, de deux façons.
5. Calculer la probabilité d'en avoir **au plus une**, puis vérifier que les probabilités de 0, 1, 2, 3 et 4 pièces défectueuses ont pour somme 1.

Exercice 8 (★★) : Monte-Carlo

On tire au hasard un point $M(x; y)$ dans le carré $[0; 1]^2$, avec x et y indépendants. On veut estimer l'aire du quart de disque $x^2 + y^2 \leq 1$.

1. Quelle est la probabilité que M soit dans le quart de disque ?
2. Compléter le script pour estimer π :

```
from random import random

def estime_pi(n):
    dedans = 0
    for _ in range(n):
        x, y = random(), random()
        if ...:
            dedans += 1
    return ...
```

3. Que peut-on dire de la valeur renvoyée quand n augmente ?

Exercice 9 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles sont indépendants.
2. Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont.
3. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
4. Deux tirages sans remise dans une urne sont indépendants.
5. Deux épreuves indépendantes sont toujours identiques.
6. Pour 4 épreuves de Bernoulli de paramètre p , la probabilité d'avoir exactement deux succès est $6p^2q^2$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Prouver ou réfuter** l'indépendance (exercices 1 et 3).
- **Succession de deux épreuves** : arbre et tableau à double entrée (exercice 4).
- **Identiques ou indépendantes** ? (exercice 5).
- **Épreuves répétées** avec arbre, produit **justifié** et « au moins un » (exercices 2 et 6).
- **Quatre épreuves** : compter les chemins à k succès (exercice 7).
- **Simulation Python** (exercice 8).
- **Incompatibles et indépendants** (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. A et B sont indépendants si :
 - A. $P(A \cap B) = 0$
 - B. $P(A \cap B) = P(A) P(B)$
 - C. $P(A \cup B) = 1$
 - D. $P(A) = P(B)$
2. A et B incompatibles, de probabilités non nulles. Alors :
 - A. ils sont indépendants
 - B. ils ne sont pas indépendants
 - C. $P(A \cap B) = P(A) P(B)$
 - D. $P(A \cup B) = P(A) P(B)$
3. Trois tirs indépendants avec $p = 0,5$: $P(\text{au moins un succès}) =$:
 - A. 0,125
 - B. 0,5
 - C. 0,875
 - D. 1,5
4. Si A et B sont indépendants, alors $P_A(B)$ est égal à :
 - A. $P(A)$
 - B. $P(B)$
 - C. $P(A) P(B)$
 - D. 0
5. Pour 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le nombre de chemins qui contiennent exactement 2 succès est :
 - A. 3
 - B. 4
 - C. 6
 - D. 8
6. On lance un dé équilibré, puis une pièce. Ces deux épreuves sont :
 - A. indépendantes et identiques
 - B. indépendantes mais pas identiques
 - C. identiques mais pas indépendantes
 - D. ni indépendantes ni identiques
7. Pour estimer une probabilité par simulation, on :

- A. calcule la probabilité exacte
- B. répète l'expérience et on calcule la fréquence
- C. prend $n = 1$
- D. vérifie l'indépendance