

Fiche 3 : indépendance et problèmes

Neuf exercices pour maîtriser l'**indépendance**, les **successions d'épreuves** et les **épreuves de Bernoulli** :

- vérifier l'**indépendance** avec un tableau ;
- deux **lancers de dés** indépendants ;
- un **paramètre** pour que deux événements soient indépendants ;
- deux épreuves de **natures différentes** : arbre et **tableau à double entrée** ;
- épreuves **identiques** ou **indépendantes** ? ;
- **trois épreuves** de Bernoulli et arbre ;
- **quatre épreuves** de Bernoulli et **chemins à k succès** ;
- **simulation** Monte-Carlo en Python ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- l'indépendance est **prouvée par le calcul** de $P(A \cap B)$ et $P(A)P(B)$;
- chaque **hypothèse d'indépendance** est citée ;
- « au moins un » passe par le **contraire**.

Le modèle de rédaction pour l'indépendance

« $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$. Donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$: A et B sont indépendants. »

- **Calcule** les deux membres séparément.
- **Compare** et conclus avec la définition.

Les pièges classiques

- Conclure à l'indépendance sans calculer.
- Confondre **incompatibles** et **indépendants**.
- Oublier de citer l'**hypothèse d'indépendance** pour multiplier.
- Utiliser un modèle **avec remise** pour un tirage sans remise.

Deux événements indépendants ne s'ignorent pas par politesse : c'est une propriété qui se vérifie par le calcul, pas par l'impression.

Exercice 1 (★) : vérifier l'indépendance

Dans deux populations, on a relevé les effectifs suivants pour deux événements A et B :

Population 1	B	$\overline{B}$
A	30	20
$\overline{A}$	60	40

Population 2	B	$\overline{B}$
A	40	10
$\overline{A}$	30	20

1. Dans la population 1, A et B sont-ils indépendants ?
2. Même question dans la population 2.

Correction de l'exercice 1

Question 1

L'effectif total est 150. $P(A) = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$ et $P(A \cap B) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$.

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5} = P(A \cap B).$$

Dans la population 1, A et B sont indépendants.

Question 2

L'effectif total est 100. $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,7$ et $P(A \cap B) = 0,4$.

$$P(A) \times P(B) = 0,35 \neq 0,4.$$

Dans la population 2, A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 2 (★) : deux lancers de dés

On lance deux fois un dé équilibré à six faces. Les deux lancers sont indépendants.

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux 6.
2. Calculer la probabilité d'obtenir **au moins un 6**.
3. Calculer la probabilité que la somme soit égale à 7.

Correction de l'exercice 2

Question 1

Les lancers sont indépendants : $P(6 \text{ puis } 6) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Question 2

Le contraire est « aucun 6 » : $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

$$P(\text{au moins un } 6) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

Question 3

Les couples de somme 7 sont (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1) : 6 couples équiprobables.

$$P(\text{somme } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Exercice 3 (★★) : un paramètre

Deux événements indépendants A et B vérifient $P(A) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,7$. On note $x = P(B)$.

1. Écrire $P(A \cup B)$ en fonction de x .
2. En déduire x .
3. Vérifier que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et, par indépendance, $P(A \cap B) = 0,4x$.

$$P(A \cup B) = 0,4 + x - 0,4x = 0,4 + 0,6x.$$

Question 2

$$0,4 + 0,6x = 0,7 \iff 0,6x = 0,3 \iff x = 0,5.$$

$$P(B) = 0,5.$$

Question 3

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,2 = 0,3 \text{ et } P(\overline{A})P(B) = 0,6 \times 0,5 = 0,3.$$

Les deux valeurs sont égales : $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Exercice 4 (★★) : une urne puis un dé

On tire une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules bleues, puis, **indépendamment**, on lance un dé équilibré. On note R : « la boule est rouge » et S : « le dé donne 6 ».

1. Représenter la succession des deux épreuves par un arbre pondéré et calculer la probabilité de chaque chemin.
2. Compléter le tableau à double entrée.

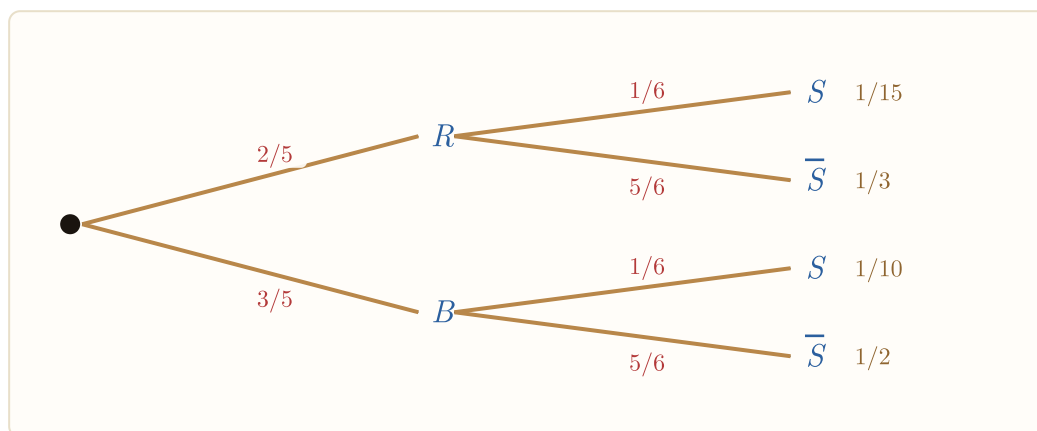
	S	$\bar{S}$	Total
R	...	...	$\frac{2}{5}$
B (bleue)	...	...	$\frac{3}{5}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge **ou** un 6, de deux façons.
4. Sachant que le dé donne 6, calculer la probabilité que la boule soit rouge. Que constate-t-on ? Pourquoi cela justifie-t-il de multiplier sur l'arbre ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

Les deux épreuves sont indépendantes : sur le deuxième niveau, les probabilités sont $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$ quelle que soit la couleur tirée. Un chemin a pour probabilité le produit de ses branches.



Arbre de l'exercice 4 : à droite, la probabilité de chaque chemin

$$P(R \cap S) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}, P(R \cap \bar{S}) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3}, P(B \cap S) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10} \text{ et } P(B \cap \bar{S}) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2}. \text{ Vérification : } \frac{2}{30} + \frac{10}{30} + \frac{3}{30} + \frac{15}{30} = 1.$$

Question 2

Chaque case est le produit de ses marges.

	S	$\bar{S}$	Total
R	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$
B (bleue)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

Contrôle : $\frac{1}{15} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ (somme de la ligne R) et $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ (somme de la colonne S).

Question 3

Par la formule : $P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S) = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{12 + 5 - 2}{30} = \frac{1}{2}$.

Par le tableau, on additionne les trois cases concernées : $\frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{2 + 10 + 3}{30} = \frac{1}{2}$.

$$P(R \cup S) = \frac{1}{2}.$$

Question 4

$$P_S(R) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = P(R).$$

Savoir que le dé donne 6 ne change pas la probabilité de tirer une boule rouge : $P_S(R) = P(R)$.

C'est l'indépendance. Sur l'arbre, la branche du deuxième niveau porte $P_R(S) = P(S)$, donc $P(R \cap S) = P(R) \times P_R(S) = P(R) \times P(S)$: le produit le long du chemin est la définition de la probabilité conditionnelle, avec $P_R(S) = P(S)$.

Exercice 5 (★★) : identiques ou indépendantes ?

Pour chaque situation, dire si les deux épreuves sont **indépendantes**, si elles sont **identiques**, et si l'on peut parler de **schéma de Bernoulli**.

(a) On lance deux fois le même dé équilibré. Le succès est « obtenir 6 ».

(b) Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire deux boules **sans remise**. Le succès est « la boule est rouge ».

(c) Un tireur effectue deux tirs indépendants : le premier, de loin, est réussi avec la probabilité 0,4 ; le second, de près, avec la probabilité 0,9.

(d) Un joueur réussit son premier tir avec la probabilité 0,6. Il réussit le deuxième avec la probabilité 0,8 s'il a réussi le premier, 0,5 sinon.

Pour chaque situation, calculer ensuite la probabilité demandée : (a) deux succès ; (b) deux boules rouges ; (c) **exactement un** succès ; (d) deux succès.

Correction de l'exercice 5

Situation (a)

Le même dé est lancé deux fois sans influence du premier lancer sur le second : épreuves **indépendantes** et **identiques** ($p = \frac{1}{6}$ à chaque fois). C'est un schéma de Bernoulli ($n = 2$).

$$P(\text{deux 6}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Situation (b)

Après un premier tirage rouge, il reste 2 rouges sur 4 boules, donc $P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; après un premier tirage bleu, $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{3}{4}$. La probabilité de rouge dépend du résultat précédent : épreuves **non indépendantes**, donc pas de schéma de Bernoulli.

On a pourtant $P(R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5} = P(R_1)$: les deux tirages ont la même probabilité de rouge, mais ils ne sont pas indépendants, car $P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \neq \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$.

$$P(\text{deux rouges}) = \frac{3}{10}.$$

Situation (c)

Les tirs sont indépendants par hypothèse, mais la probabilité de succès change (0,4 puis 0,9) : épreuves **indépendantes** mais **pas identiques**, donc pas de schéma de Bernoulli. On multiplie quand même le long des chemins.

« Exactement un succès » : $S_1 \overline{S_2}$ ou $\overline{S_1} S_2$. $P = 0,4 \times 0,1 + 0,6 \times 0,9 = 0,04 + 0,54 = 0,58$.

$P(\text{exactement un succès}) = 0,58$ (et non $2 \times 0,4 \times 0,6 = 0,48$, qui supposerait $p = 0,4$ aux deux tirs).

Situation (d)

La probabilité de réussir le deuxième tir dépend du premier : épreuves **non indépendantes** (et pas identiques : $P(S_2) = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,5 = 0,68 \neq 0,6$).

$P(S_1 \cap S_2) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$ (probabilité conditionnelle), alors que $P(S_1) \times P(S_2) = 0,6 \times 0,68 = 0,408$.

$P(\text{deux succès}) = 0,48$; S_1 et S_2 ne sont pas indépendants.

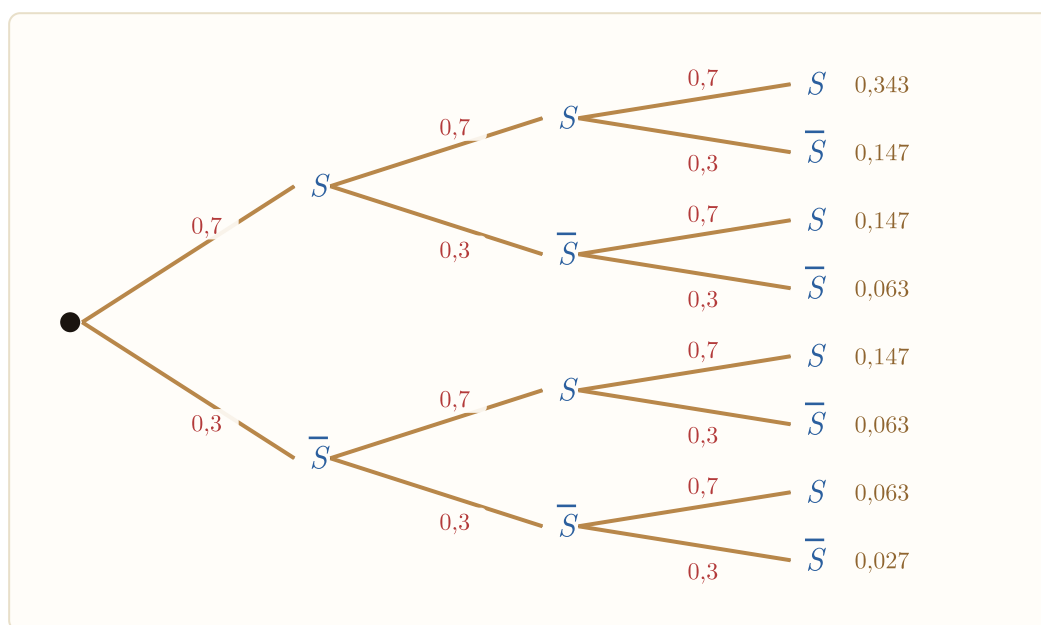
Exercice 6 (★★) : trois tirs

Un tireur réussit chaque tir avec la probabilité 0,7. Les trois tirs sont indépendants. On note S le succès.

1. Dessiner l'arbre pondéré des trois tirs.
2. Calculer la probabilité de réussir les trois tirs.
3. Calculer la probabilité de réussir **exactement deux** tirs.
4. Calculer la probabilité de réussir **au moins un** tir.
5. Justifier, en citant l'indépendance, que le chemin $SS\bar{S}$ a pour probabilité $0,7 \times 0,7 \times 0,3$.
6. Donner la probabilité de 0, 1, 2 et 3 succès et vérifier que la somme vaut 1.

Correction de l'exercice 6

Question 1



Arbre des trois tirs : à droite, la probabilité de chaque chemin

Question 2

Les tirs sont indépendants : $P(SSS) = 0,7^3 = 0,343$.

$$P(SSS) = 0,343.$$

Question 3

Les chemins à deux succès sont $SS\bar{S}$, $S\bar{S}S$ et $\bar{S}SS$. Chacun a pour probabilité $0,7^2 \times 0,3 = 0,147$.

$$P(\text{exactement deux}) = 3 \times 0,147 = 0,441.$$

Question 4

Le contraire est « aucun succès » : $P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = 0,3^3 = 0,027$.

$$P(\text{au moins un}) = 1 - 0,027 = 0,973.$$

Question 5

Notons S_i « le tir i est réussi ». Le chemin $SS\bar{S}$ représente $S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3$. Les tirs sont indépendants : $S_1 \cap S_2$, lié aux deux premiers tirs, est indépendant de $\bar{S}_3$, lié au troisième. Donc $P(S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3) = P(S_1 \cap S_2) \times P(\bar{S}_3) = P(S_1) P(S_2) P(\bar{S}_3)$.

$$P(SS\bar{S}) = 0,7 \times 0,7 \times 0,3 = 0,147.$$

Question 6

Nombre de chemins : 1, 3, 3, 1. $P(0) = 0,3^3 = 0,027$; $P(1) = 3 \times 0,7 \times 0,3^2 = 0,189$; $P(2) = 0,441$; $P(3) = 0,343$.

Nombre de succès	0	1	2	3
Probabilité	0,027	0,189	0,441	0,343

Somme : $0,027 + 0,189 + 0,441 + 0,343 = 1$.

Exercice 7 (★★) : quatre pièces

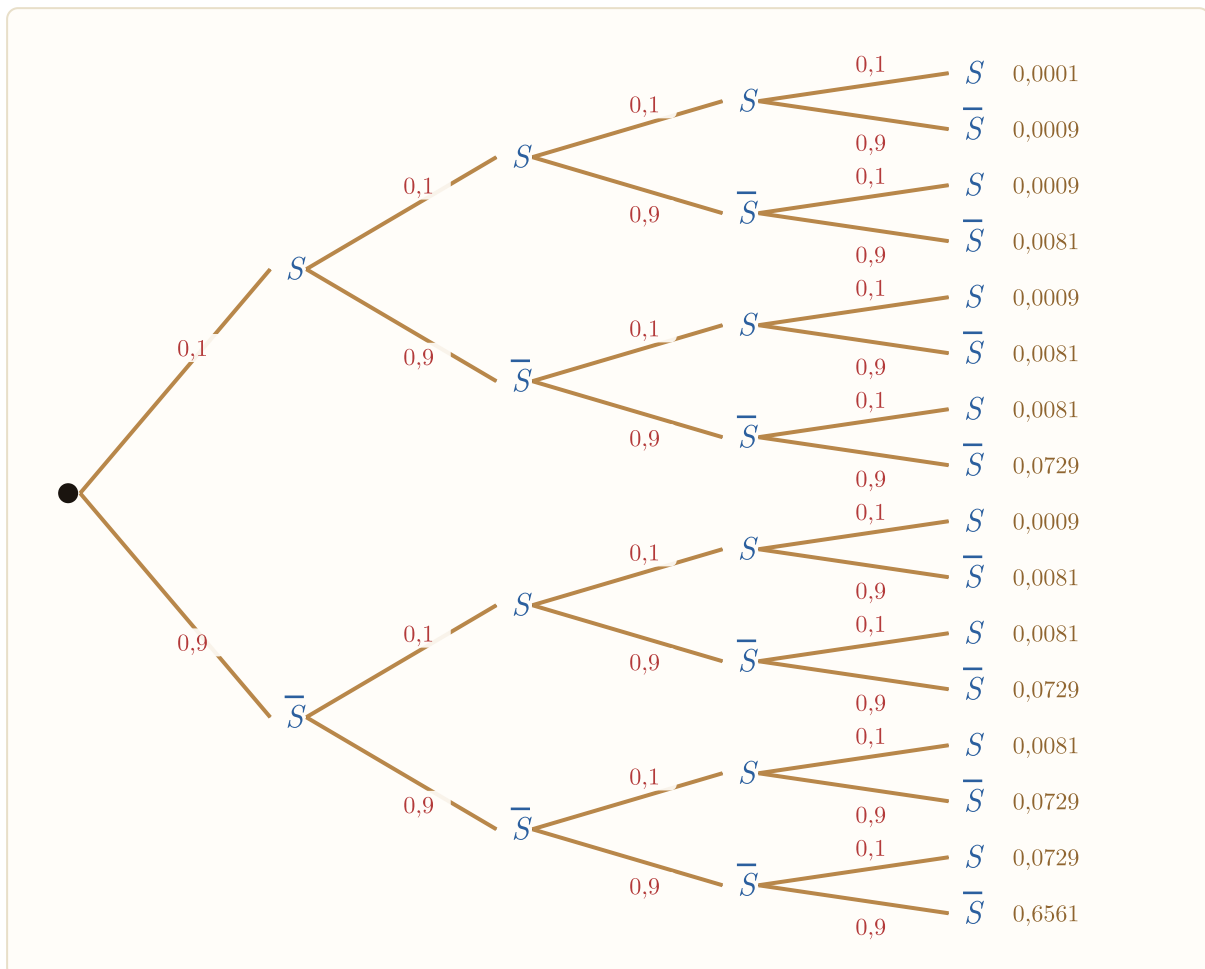
Une machine fabrique des pièces, chacune défectueuse avec la probabilité $0,1$, indépendamment des autres. On prélève 4 pièces. On note D « la pièce est défectueuse » (succès).

1. Justifier qu'il s'agit de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Représenter l'arbre.
2. Combien de chemins contiennent exactement 0, 1, 2, 3 ou 4 pièces défectueuses ?
3. Calculer la probabilité d'avoir exactement 0, 1 puis 2 pièces défectueuses.
4. Calculer la probabilité d'avoir **au moins une** pièce défectueuse, de deux façons.
5. Calculer la probabilité d'en avoir **au plus une**, puis vérifier que les probabilités de 0, 1, 2, 3 et 4 pièces défectueuses ont pour somme 1.

Correction de l'exercice 7

Question 1

Chaque pièce a deux issues (défectueuse ou non), les pièces sont indépendantes (hypothèse de l'énoncé) et la probabilité $p = 0,1$ est la même pour chacune ($q = 0,9$).



Arbre des quatre pièces : à droite, la probabilité de chaque chemin

Question 2

On compte sur l'arbre (ou on écrit les chemins) : un seul chemin sans défectueuse, **quatre** avec une seule (elle est en position **1, 2, 3** ou **4**), **six** avec deux (voir le cours), **quatre** avec trois (une seule pièce est bonne) et un seul avec quatre.

Nombre de défectueuses	0	1	2	3	4
Chemins	1	4	6	4	1
Probabilité d'un chemin	$0,9^4 = 0,6561$	$0,1 \times 0,9^3 = 0,0729$	$0,1^2 \times 0,9^2 = 0,0081$	$0,1^3 \times 0,9 = 0,0009$	$0,1^4 = 0,0001$

Question 3

$$P(0) = 0,9^4 = 0,6561, P(1) = 4 \times 0,0729 = 0,2916, P(2) = 6 \times 0,0081 = 0,0486.$$

$$P(0) = 0,6561, P(1) = 0,2916 \text{ et } P(2) = 0,0486.$$

Question 4

Par le contraire : $1 - P(0) = 1 - 0,6561 = 0,3439$. Par la somme des chemins : $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0,2916 + 0,0486 + 0,0036 + 0,0001 = 0,3439$, avec $P(3) = 4 \times 0,0009 = 0,0036$ et $P(4) = 0,0001$.

$$P(\text{au moins une}) = 0,3439.$$

Question 5

$$P(\text{au plus une}) = P(0) + P(1) = 0,6561 + 0,2916 = 0,9477.$$

$$\text{Somme : } 0,6561 + 0,2916 + 0,0486 + 0,0036 + 0,0001 = 1.$$

$$P(\text{au plus une}) = 0,9477 \text{ et la somme vaut bien } 1.$$

Exercice 8 (★★) : Monte-Carlo

On tire au hasard un point $M(x; y)$ dans le carré $[0; 1]^2$, avec x et y indépendants. On veut estimer l'aire du quart de disque $x^2 + y^2 \leq 1$.

1. Quelle est la probabilité que M soit dans le quart de disque ?
2. Compléter le script pour estimer π :

```
from random import random

def estime_pi(n):
    dedans = 0
    for _ in range(n):
        x, y = random(), random()
        if ...:
            dedans += 1
    return ...
```

3. Que peut-on dire de la valeur renvoyée quand n augmente ?

Correction de l'exercice 8

Question 1

Le carré a pour aire 1 et le quart de disque a pour aire $\frac{\pi}{4}$.

La probabilité est $\frac{\pi}{4}$.

Question 2

La condition est $x^2 + y^2 \leq 1$ et la fonction renvoie $4 * \text{dedans} / n$ (car la fréquence approche $\frac{\pi}{4}$).

```
def estime_pi(n):
    dedans = 0
    for _ in range(n):
        x, y = random(), random()
        if x ** 2 + y ** 2 <= 1:
            dedans += 1
    return 4 * dedans / n
```

Question 3

La fréquence de réussite se stabilise autour de $\frac{\pi}{4}$. Pour $n = 100\,000$, on obtient en général une valeur proche de **3,14**, souvent à **0,01** près.

Plus n est grand, plus l'estimation est proche de π , mais elle reste **aléatoire**.

Exercice 9 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles sont indépendants.
2. Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont.
3. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
4. Deux tirages sans remise dans une urne sont indépendants.
5. Deux épreuves indépendantes sont toujours identiques.
6. Pour 4 épreuves de Bernoulli de paramètre p , la probabilité d'avoir exactement deux succès est $6p^2q^2$.

Correction de l'exercice 9

Affirmation 1

Alors $P(A \cap B) = 0$ alors que $P(A)P(B) \neq 0$.**Faux.**

Affirmation 2

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(\bar{A})P(B).$$

Vrai.

Affirmation 3

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} : \text{l'égalité équivaut à } P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Vrai.

Affirmation 4

$$\text{Exercice 5 de la fiche 1 : } P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7} \neq P(R_2) = \frac{5}{8}.$$

Faux.

Affirmation 5

Contre-exemple : un dé puis une pièce (exercice 4 ou cours §6) sont deux épreuves indépendantes, mais pas identiques ; de même les deux tirs de l'exercice 5 (c).

Faux.

Affirmation 6

Il y a 6 chemins à deux succès pour $n = 4$ (exercice 7), chacun de probabilité p^2q^2 par indépendance.

Vrai.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Prouver ou réfuter** l'indépendance (exercices 1 et 3).
- **Succession de deux épreuves** : arbre et tableau à double entrée (exercice 4).
- **Identiques ou indépendantes** ? (exercice 5).
- **Épreuves répétées** avec arbre, produit **justifié** et « au moins un » (exercices 2 et 6).
- **Quatre épreuves** : compter les chemins à k succès (exercice 7).
- **Simulation** Python (exercice 8).
- **Incompatibles et indépendants** (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. A et B sont indépendants si :

- A. $P(A \cap B) = 0$
- B. $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ (bonne réponse)
- C. $P(A \cup B) = 1$
- D. $P(A) = P(B)$

Justification : C'est la définition.

2. A et B incompatibles, de probabilités non nulles. Alors :

- A. ils sont indépendants
- B. ils ne sont pas indépendants (bonne réponse)
- C. $P(A \cap B) = P(A) P(B)$
- D. $P(A \cup B) = P(A) P(B)$

Justification : $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.

3. Trois tirs indépendants avec $p = 0,5$: $P(\text{au moins un succès}) =$:

- A. 0,125
- B. 0,5
- C. 0,875 (bonne réponse)
- D. 1,5

Justification : $1 - 0,5^3 = 0,875$.

4. Si A et B sont indépendants, alors $P_A(B)$ est égal à :

- A. $P(A)$
- B. $P(B)$ (**bonne réponse**)
- C. $P(A)P(B)$
- D. 0

Justification : Savoir A ne change pas la probabilité de B .

5. Pour 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le nombre de chemins qui contiennent exactement 2 succès est :

- A. 3
- B. 4
- C. 6 (**bonne réponse**)
- D. 8

Justification : On écrit les chemins : $SS\bar{S}\bar{S}$, $S\bar{S}S\bar{S}$, $S\bar{S}\bar{S}S$, $\bar{S}SS\bar{S}$, $\bar{S}S\bar{S}S$, $\bar{S}\bar{S}SS$: il y en a 6.

6. On lance un dé équilibré, puis une pièce. Ces deux épreuves sont :

- A. indépendantes et identiques
- B. **indépendantes mais pas identiques (bonne réponse)**
- C. identiques mais pas indépendantes
- D. ni indépendantes ni identiques

Justification : Le résultat du dé n'influence pas la pièce, mais ce ne sont pas deux fois la même épreuve.

7. Pour estimer une probabilité par simulation, on :

- A. calcule la probabilité exacte
- B. **répète l'expérience et on calcule la fréquence (bonne réponse)**
- C. prend $n = 1$
- D. vérifie l'indépendance

Justification : La fréquence se stabilise autour de la probabilité quand n est grand.