

Fiche 2 : inversion du conditionnement

Six exercices pour maîtriser l'inversion du conditionnement :

- un **test médical** ;
- formule d'inversion avec des **données** ;
- deux **urnes** ;
- un **filtre anti-spam** ;
- **reconstituer** des données manquantes ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- l'arbre est **dessiné** et les événements sont **nommés** ;
- $P(B)$ est calculé par la **formule des probabilités totales** avant la division ;
- le résultat est **interprété** par une phrase.

Le modèle de rédaction pour une probabilité « sachant que »

« On cherche $P_T(M)$. Par définition, $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$. On a $P(M \cap T) = 0,019$ et, d'après la formule des probabilités totales, $P(T) = 0,0582$. Donc $P_T(M) = \frac{0,019}{0,0582} \approx 0,33$. »

- **Écris** ce que l'on cherche avec la notation $P_B(A)$.
- **Numérateur** : un chemin de l'arbre.
- **Dénominateur** : les probabilités totales.

Pas de formule à retenir par cœur. Le calcul de $P_B(A)$ s'appelle parfois « formule de Bayes ». Ce n'est **pas** une formule du programme : c'est la définition $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, avec **un chemin de l'arbre au numérateur et les probabilités totales au dénominateur**. Dans les corrections, on refait ce raisonnement à chaque fois.

Les pièges classiques

- Confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
- Diviser par le **mauvais événement**.
- Oublier de calculer $P(B)$ avant de diviser.
- Donner la valeur sans **l'interpréter**.

Si ton test dit « positif » et que tu t'écroules, respire : fais d'abord le calcul de $P_T(M)$.

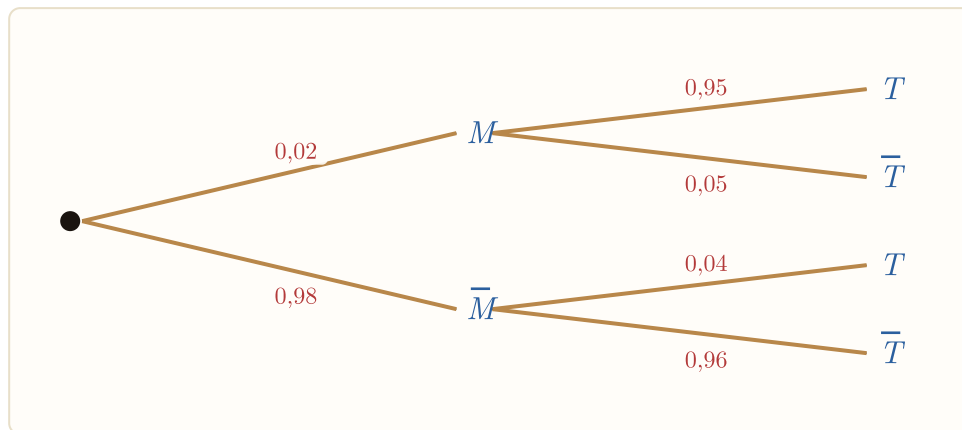
Exercice 1 (★★) : un test médical

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test est positif (T) pour 95 % des personnes malades (M) et pour 4 % des personnes non malades.

1. Dessiner l'arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade **et** ait un test positif.
3. Calculer $P(T)$.
4. Calculer $P_T(M)$ et commenter.

Correction de l'exercice 1

Question 1



Arbre du test médical

Question 2

$$P(M \cap T) = 0,02 \times 0,95 = 0,019.$$

Question 3

M et $\bar{M}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = 0,019 + 0,98 \times 0,04 = 0,019 + 0,0392 = 0,0582.$$

Question 4

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,0582} \approx 0,33.$$

Un test positif ne signifie malade qu'avec la probabilité **0,33** environ : la maladie est rare, donc les faux positifs sont nombreux.

Exercice 2 (★) : inverser avec les données

Deux événements A et B vérifient $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,26$ et $P(A \cap B) = 0,12$.

1. Calculer $P_A(B)$.
2. Calculer $P_B(A)$.
3. Retrouver $P(A \cap B)$ à partir de $P(A)$ et de $P_A(B)$, puis recalculer $P_B(A)$ avec ce résultat.

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,3} = 0,4.$$

Question 2

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,26} = \frac{6}{13} \approx 0,46.$$

Question 3

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12, \text{ ce qui est bien la donnée de l'énoncé. Alors}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,26} = \frac{6}{13}.$$

Les deux écritures de $P(A \cap B)$ donnent le même résultat : $P_B(A) = \frac{6}{13}$.

Exercice 3 (★★) : deux urnes

On lance un dé équilibré. Si le résultat est 1 ou 2, on tire une boule dans l'urne U_1 (3 rouges, 1 bleue). Sinon on tire dans l'urne U_2 (1 rouge, 3 bleues). On note R : « la boule est rouge ».

1. Donner $P(U_1)$, $P_{U_1}(R)$ et $P_{U_2}(R)$.
2. Calculer $P(R)$.
3. La boule est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de U_1 ?

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$P(U_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ donc } P(U_2) = \frac{2}{3}. P_{U_1}(R) = \frac{3}{4} \text{ et } P_{U_2}(R) = \frac{1}{4}.$$

Question 2

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

$$P(R) = \frac{5}{12}.$$

Question 3

$$P_R(U_1) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{1}{4} \times \frac{12}{5} = \frac{3}{5}.$$

La probabilité est $\frac{3}{5} = 0,6$.

Exercice 4 (★★) : un filtre anti-spam

30 % des courriels reçus sont des spams. Un filtre classe comme suspect (S) 95 % des spams et 2 % des courriels légitimes.

1. Calculer la probabilité qu'un courriel soit classé suspect.
2. Un courriel est classé suspect. Quelle est la probabilité que ce soit un spam ?
3. Un courriel n'est pas classé suspect. Quelle est la probabilité que ce soit un spam ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

On note C : « le courriel est un spam ». C et $\bar{C}$ forment une partition.

$$P(S) = 0,3 \times 0,95 + 0,7 \times 0,02 = 0,285 + 0,014 = 0,299.$$

$$P(S) = 0,299.$$

Question 2

$$P_S(C) = \frac{0,285}{0,299} \approx 0,953.$$

Un courriel suspect est un spam avec la probabilité 0,95 environ.

Question 3

$$P(C \cap \bar{S}) = 0,3 \times 0,05 = 0,015 \text{ et } P(\bar{S}) = 1 - 0,299 = 0,701.$$

$$P_{\bar{S}}(C) = \frac{0,015}{0,701} \approx 0,021.$$

Un courriel non suspect est un spam avec la probabilité 0,02 environ.

Exercice 5 (★★★) : données manquantes

Deux événements A et B vérifient $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,5$ et $P(B) = 0,35$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. En déduire $P(\bar{A} \cap B)$ puis $P_{\bar{A}}(B)$.
3. Calculer $P_B(A)$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2.$$

Question 2

A et $\bar{A}$ forment une partition : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$, donc $P(\bar{A} \cap B) = 0,35 - 0,2 = 0,15$.

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6, \text{ donc } P_{\bar{A}}(B) = \frac{0,15}{0,6} = 0,25.$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,15 \text{ et } P_{\bar{A}}(B) = 0,25.$$

Question 3

$$P_B(A) = \frac{0,2}{0,35} = \frac{4}{7}.$$

$$P_B(A) = \frac{4}{7} \approx 0,57.$$

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si $P(B) \neq 0$, alors $P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}$ (la définition, avec $P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$).
2. Si $P_A(B) = 0,9$, alors $P_B(A) = 0,9$.
3. Un test fiable à 95 % signifie qu'une personne au test positif est malade avec la probabilité 0,95.
4. $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ et } P(A \cap B) = P(A) P_A(B).$$

Vrai.

Affirmation 2

Contre-exemple : exercice 5, $P_A(B) = 0,5$ et $P_B(A) = \frac{4}{7}$.**Faux.**

Affirmation 3

« Fiable à 95 % » désigne $P_M(T)$, pas $P_T(M)$. L'exercice 1 donne $P_T(M) \approx 0,33$.**Faux.**

Affirmation 4

C'est la formule des probabilités totales avec la partition $\{A; \bar{A}\}$.**Vrai.****Ce qui peut tomber en contrôle**

- **Test médical** ou **contrôle qualité** : inversion du conditionnement (exercices 1 et 4).
- **Formule d'inversion** (exercice 2).
- **Deux urnes** et choix de l'urne (exercice 3).
- **Données manquantes** à reconstituer (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. On cherche la probabilité d'être malade sachant que le test est positif. On calcule :

- A. $P_M(T)$
- B. $P_T(M)$ (**bonne réponse**)
- C. $P(M \cap T)$
- D. $P(M) \times P(T)$

Justification : « Sachant que le test est positif » : on conditionne par T .2. Pour $P_T(M)$, le dénominateur est :

- A. $P(M)$
- B. $P(T)$ (**bonne réponse**)
- C. $P_M(T)$
- D. 1

Justification : On divise par $P(T)$, calculé avec les probabilités totales.

3. Avec $P(A \cap B) = 0,12$ et $P(B) = 0,3$, $P_B(A)$ vaut :

- A. 0,4 (**bonne réponse**)
- B. 0,36
- C. 0,12
- D. 2,5

Justification : $\frac{0,12}{0,3} = 0,4$.

4. Si $P_A(B) = 0,8$ et $P(A) < P(B)$, alors $P_B(A)$ est :

- A. égal à 0,8
- B. supérieur à 0,8
- C. **inférieur à 0,8 (bonne réponse)**
- D. égal à 0,2

Justification : $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} \times 0,8$ avec $\frac{P(A)}{P(B)} < 1$.

5. Pour calculer $P_B(A)$ avec un arbre écrit dans l'ordre A puis B , il faut :

- A. lire la branche de A vers B
- B. **calculer $P(A \cap B)$ et $P(B)$ puis diviser (bonne réponse)**
- C. additionner les deux branches
- D. multiplier $P(A)$ et $P(B)$

Justification : On remonte le temps avec la définition.