

Fiche 1 : arbres pondérés et probabilités totales

Sept exercices pour maîtriser les arbres pondérés et la formule des probabilités totales :

- lecture d'un **tableau croisé** ;
- **compléter un arbre** pondéré ;
- probabilités totales avec **deux** événements ;
- probabilités totales avec **trois** événements ;
- **tirages sans remise** ;
- **distinguer** $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- les **événements** sont nommés avant tout calcul ;
- chaque **chemin** est calculé séparément puis additionné ;
- la **somme des feuilles** est vérifiée.

Le modèle de rédaction pour la formule des probabilités totales

« A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) = 0,6 \times 0,9 + 0,4 \times 0,4 = 0,7$. »

- **Nomme** la partition.
- **Cite** la formule.
- **Remplace** par les valeurs, puis calcule.

Les pièges classiques

- Oublier un chemin qui aboutit à l'événement.
- Mettre une probabilité **non conditionnelle** sur le deuxième niveau.
- Ne pas citer la formule et donner seulement le résultat.
- Écrire $P(B) = P_A(B) + P_{\bar{A}}(B)$.

Oublier un chemin dans l'arbre, c'est comme oublier un invité à la fête : le total ne tombe pas juste et tout le monde le remarque.

Exercice 1 (★) : tableau croisé

Une entreprise compte 250 salariés, dont 140 femmes. 100 salariés télétravaillent, dont 60 femmes. On choisit un salarié au hasard. On note F : « c'est une femme » et T : « il télétravaille ».

1. Compléter le tableau des effectifs.
2. Calculer $P(F)$, $P(T)$ et $P(F \cap T)$.
3. Calculer $P_F(T)$ et $P_T(F)$, puis interpréter ces deux nombres par une phrase.

Correction de l'exercice 1

Question 1

Les femmes qui ne télétravaillent pas : $140 - 60 = 80$. Les hommes : $250 - 140 = 110$. Les hommes qui télétravaillent : $100 - 60 = 40$, et ceux qui ne télétravaillent pas : $110 - 40 = 70$.

	T	$\overline{T}$	Total
F	60	80	140
$\overline{F}$	40	70	110
Total	100	150	250

Question 2

$$P(F) = \frac{140}{250} = 0,56 \text{ et } P(T) = \frac{100}{250} = 0,4.$$

$$P(F \cap T) = \frac{60}{250} = 0,24.$$

Question 3

$$P_F(T) = \frac{60}{140} = \frac{3}{7} \approx 0,43 \text{ et } P_T(F) = \frac{60}{100} = 0,6.$$

Parmi les femmes, 43 % télétravaillent. Parmi les télétravailleurs, 60 % sont des femmes.

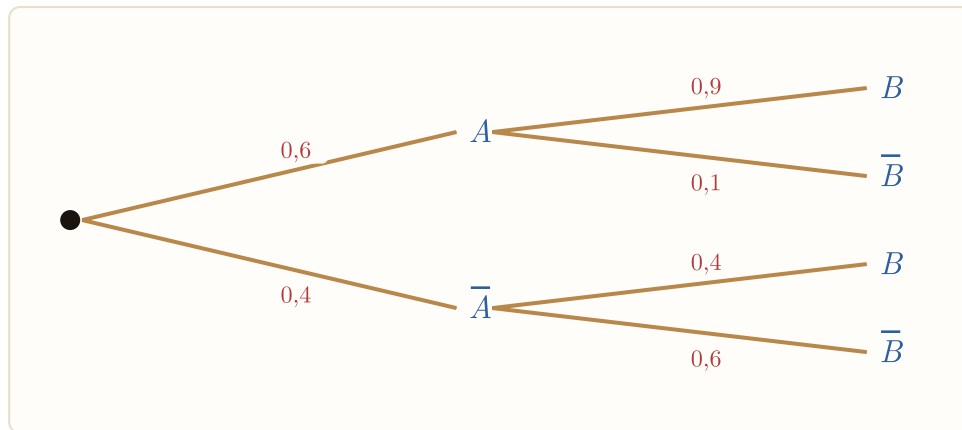
Exercice 2 (★) : compléter un arbre

Un élève révise la veille d'un contrôle avec la probabilité 0,6. S'il révise, il réussit avec la probabilité 0,9. S'il ne révise pas, il réussit avec la probabilité 0,4. On note A : « il révise » et B : « il réussit ».

1. Dessiner l'arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de chacun des quatre chemins.
3. En déduire $P(B)$.

Correction de l'exercice 2

Question 1



Arbre de l'exercice 2

Question 2

$$P(A \cap B) = 0,6 \times 0,9 = 0,54 \text{ et } P(A \cap \overline{B}) = 0,6 \times 0,1 = 0,06.$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 0,4 \times 0,4 = 0,16 \text{ et } P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,4 \times 0,6 = 0,24.$$

$$\text{Vérification : } 0,54 + 0,06 + 0,16 + 0,24 = 1.$$

Question 3

A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0,54 + 0,16 = 0,70.$$

$$P(B) = 0,7.$$

Exercice 3 (★★) : deux événements

Un site marchand reçoit 70 % de ses commandes depuis un téléphone (M) et 30 % depuis un ordinateur. Un article est retourné (R) dans 10 % des commandes par téléphone et dans 4 % des commandes par ordinateur.

1. Donner $P(M)$, $P_M(R)$ et $P_{\overline{M}}(R)$.
2. Calculer la probabilité qu'une commande soit passée par téléphone et retournée.
3. Calculer la probabilité qu'une commande soit retournée.
4. Calculer la probabilité qu'une commande ne soit pas retournée.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$P(M) = 0,7, P_M(R) = 0,1 \text{ et } P_{\overline{M}}(R) = 0,04.$$

Question 2

$$P(M \cap R) = P(M) \times P_M(R) = 0,7 \times 0,1 = 0,07.$$

$$P(M \cap R) = 0,07.$$

Question 3

M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(M \cap R) + P(\overline{M} \cap R) = 0,07 + 0,3 \times 0,04 = 0,07 + 0,012 = 0,082.$$

$$P(R) = 0,082.$$

Question 4

$$P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0,082 = 0,918.$$

$$P(\overline{R}) = 0,918.$$

Exercice 4 (★★) : trois événements

Un atelier reçoit ses pièces de trois fournisseurs F_1 , F_2 , F_3 , avec les parts 50 %, 30 % et 20 %. Les taux de pièces défectueuses sont 1 %, 2 % et 5 %. On prend une pièce au hasard. On note D : « la pièce est défectueuse ».

1. Montrer que F_1 , F_2 , F_3 forment une partition de l'univers.
2. Calculer $P(D)$.
3. Calculer la probabilité qu'une pièce vienne de F_3 et soit en bon état.

Correction de l'exercice 4

Question 1

Les trois fournisseurs sont deux à deux incompatibles (une pièce n'a qu'un fournisseur) et $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$.

$\{F_1; F_2; F_3\}$ est une partition de l'univers.

Question 2

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = 0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,02 + 0,2 \times 0,05 = 0,005 + 0,006 + 0,010 = 0,021.$$

$$P(D) = 0,021, \text{ soit } 2,1 \% \text{ de pièces défectueuses.}$$

Question 3

$$P(F_3 \cap \overline{D}) = P(F_3) \times P_{F_3}(\overline{D}) = 0,2 \times 0,95 = 0,19.$$

La probabilité est 0,19.

Exercice 5 (★★) : tirages sans remise

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules bleues. On tire successivement **deux boules sans remise**. On note R_1 : « la première est rouge » et R_2 : « la deuxième est rouge ».

1. Donner $P(R_1)$ et $P_{R_1}(R_2)$.
2. Calculer $P(R_1 \cap R_2)$.
3. Calculer $P(R_2)$.
4. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

Correction de l'exercice 5

Question 1

$P(R_1) = \frac{5}{8}$. Si R_1 est réalisé, il reste 4 rouges sur 7 boules.

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}.$$

Question 2

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$$

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{14}.$$

Question 3

R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition. Si $\overline{R_1}$ est réalisé, il reste 5 rouges sur 7 boules : $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{5}{7}$.

$$P(R_2) = \frac{5}{14} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{56} + \frac{15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}.$$

$$P(R_2) = \frac{5}{8} = P(R_1).$$

Question 4

Deux couleurs différentes : rouge puis bleue, ou bleue puis rouge.

$$P = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}.$$

La probabilité est $\frac{15}{28}$.

Exercice 6 (★) : distinguer trois probabilités

Un club compte 40 adhérents. 25 pratiquent la natation (N), 16 pratiquent le tennis (T) et 6 pratiquent les deux. On choisit un adhérent au hasard.

1. Calculer $P(N \cap T)$, $P_N(T)$ et $P_T(N)$.
2. Associer chaque nombre à sa phrase : (a) « parmi les nageurs, la proportion de joueurs de tennis » ; (b) « la proportion d'adhérents qui pratiquent les deux sports » ; (c) « parmi les joueurs de tennis, la proportion de nageurs ».
3. Calculer la probabilité qu'un adhérent qui **ne nage pas** joue au tennis, et l'écrire avec les notations du cours.

Correction de l'exercice 6

Question 1

$$P(N \cap T) = \frac{6}{40} = 0,15.$$

$$P_N(T) = \frac{6}{25} = 0,24 \text{ et } P_T(N) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Question 2

Le dénominateur est l'effectif de l'événement « sachant » : (a) est $P_N(T) = 0,24$ (on divise par les 25 nageurs) ; (b) est $P(N \cap T) = 0,15$ (on divise par les 40 adhérents) ; (c) est $P_T(N) = 0,375$ (on divise par les 16 joueurs de tennis).

Question 3

Il y a $40 - 25 = 15$ adhérents qui ne nagent pas. Parmi eux, $16 - 6 = 10$ jouent au tennis.

$$P_{\overline{N}}(T) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Les probabilités des branches issues d'un même nœud ont pour somme 1.
2. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
3. On a toujours $P_A(B) + P_{\overline{A}}(B) = 1$.
4. Dans un arbre, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le réalisent.

Correction de l'exercice 7

Affirmation 1

Les issues d'un nœud forment une partition de l'univers conditionnel.

Vrai.

Affirmation 2

C'est la définition de la probabilité conditionnelle, écrite autrement.

Vrai.

Affirmation 3

Contre-exemple de l'exercice 2 : $P_A(B) + P_{\overline{A}}(B) = 0,9 + 0,4 = 1,3$.**Faux.**

Affirmation 4

Les chemins sont deux à deux incompatibles.

Vrai.**Ce qui peut tomber en contrôle**

- **Lire** un tableau croisé (exercice 1).
- **Compléter un arbre** et calculer les chemins (exercice 2).
- **Probabilités totales** à deux ou trois événements (exercices 3 et 4).
- **Sans remise** (exercice 5).
- **Distinguer** $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$ (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est :

- A. la somme des probabilités des branches
- B. **le produit des probabilités des branches (bonne réponse)**
- C. la plus grande probabilité du chemin
- D. toujours $\frac{1}{2}$

Justification : On multiplie le long d'un chemin.

2. $P_A(B)$ se calcule par :

- A. $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- B. $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ **(bonne réponse)**
- C. $P(A) \times P(B)$
- D. $P(A) + P(B)$

Justification : On divise par la probabilité de l'événement « sachant ».

3. Avec $P(A) = 0,3$, $P_A(B) = 0,5$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$, on a $P(B) =$:

- A. 0,7
- B. 0,29 **(bonne réponse)**
- C. 0,15
- D. 0,35

Justification : $0,3 \times 0,5 + 0,7 \times 0,2 = 0,15 + 0,14 = 0,29$.

4. Les événements A_1 , A_2 , A_3 forment une partition si :

- A. **ils sont incompatibles et leur réunion est l'univers (bonne réponse)**
- B. ils sont indépendants
- C. leurs probabilités sont égales
- D. ils sont tous de probabilité $\frac{1}{3}$

Justification : Deux à deux incompatibles et de réunion l'univers.

5. Dans un groupe de 50 personnes, 30 ont un chien (C) et 10 ont un chien et un chat. La probabilité qu'une personne ait un chat **sachant** qu'elle a un chien vaut :

- A. $\frac{10}{50}$
- B. $\frac{10}{30}$ **(bonne réponse)**
- C. $\frac{30}{50}$
- D. $\frac{10}{40}$

Justification : On divise l'effectif de $C \cap \text{chat}$ par l'effectif de C : $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

6. Dans une urne sans remise, les deux tirages successifs :

- A. sont toujours indépendants
- B. ne sont en général pas indépendants (bonne réponse)**
- C. sont incompatibles
- D. ont la même probabilité conditionnelle

Justification : La composition de l'urne change après le premier tirage.