

Contrôle : chapitre 9, Probabilités conditionnelles et indépendance

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6,5 points) : Un logiciel antivirus

Un antivirus analyse des fichiers. On sait que 8 % des fichiers analysés sont infectés. L'antivirus signale 96 % des fichiers infectés, mais signale aussi à tort 5 % des fichiers sains.

On choisit un fichier au hasard parmi les fichiers analysés. On note I l'événement « le fichier est infecté » et S l'événement « l'antivirus signale le fichier ».

Sauf mention contraire, les résultats sont donnés sous forme décimale exacte ou arrondis à 10^{-3} près.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré (en précisant les probabilités portées par chaque branche). (1 point)
2. Calculer la probabilité que le fichier soit infecté et signalé par l'antivirus. (1 point)
3. Montrer que la probabilité que le fichier soit signalé est $P(S) = 0,1228$. (1,5 points)
4. Le fichier est signalé. Calculer la probabilité qu'il soit réellement infecté. Interpréter le résultat. (1,5 points)
5. Le fichier n'est pas signalé. Calculer la probabilité qu'il soit tout de même infecté. (1,5 points)

Exercice 2 (6 points) : Indépendance

Un club sportif compte 500 adhérents. On interroge un adhérent au hasard. On note A l'événement « l'adhérent pratique la natation » et B l'événement « l'adhérent a moins de 30 ans ». Les effectifs sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	B	$\overline{B}$	Total
A	120	180	300
$\overline{A}$	80	120	200
Total	200	300	500

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$. (1,5 points)
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ? (1 point)
3. Soit A et B deux événements indépendants d'un même univers. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants. (2 points)
4. Soit E et F deux événements tels que $P(E) = 0,5$, $P(F) = 0,4$ et $P(E \cup F) = 0,7$. Les événements E et F sont-ils indépendants ? (1,5 points)

Exercice 3 (7,5 points) : Séance de tirs au but

Un joueur effectue une série de tirs au but. À chaque tir, il marque avec la probabilité $0,7$, et les tirs sont supposés indépendants les uns des autres. Il effectue d'abord **3** tirs. On note B l'événement « le tir est réussi » et $\overline{B}$ l'événement « le tir est manqué ».

Pour la question 5, on utilise le script Python suivant.

```
from random import random

def tirs():
    reussites = 0
    for i in range(3):
        if random() < 0.7:
            reussites = reussites + 1
    return reussites

def estimation(N):
    compteur = 0
    for k in range(N):
        if tirs() == 2:
            compteur = compteur + 1
    return compteur / N

print(estimation(100000))
```

1. Calculer la probabilité qu'il marque les trois tirs. En déduire la probabilité qu'il manque au moins un tir. *(1 point)*
2. Calculer la probabilité qu'il marque exactement deux buts. *(1,5 points)*
3. Sachant qu'il a marqué exactement deux buts, quelle est la probabilité que le premier tir ait été manqué ? *(1,5 points)*
4. Le joueur effectue maintenant n tirs ($n \geq 1$). Exprimer en fonction de n la probabilité de marquer au moins un but, puis déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n pour lequel cette probabilité est supérieure ou égale à $0,999$. *(2 points)*
5. On exécute le script Python de l'introduction de l'exercice. Expliquer ce que simule la fonction `tirs`, ce que renvoie `estimation(N)`, puis indiquer de quelle valeur la valeur affichée est proche. *(1,5 points)*