

Contrôle : chapitre 9, Probabilités conditionnelles et indépendance

Durée : 45 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6,5 points) : Un logiciel antivirus

Un antivirus analyse des fichiers. On sait que 8 % des fichiers analysés sont infectés. L'antivirus signale 96 % des fichiers infectés, mais signale aussi à tort 5 % des fichiers sains.

On choisit un fichier au hasard parmi les fichiers analysés. On note I l'événement « le fichier est infecté » et S l'événement « l'antivirus signale le fichier ».

Sauf mention contraire, les résultats sont donnés sous forme décimale exacte ou arrondis à 10^{-3} près.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré (en précisant les probabilités portées par chaque branche). (1 point)
2. Calculer la probabilité que le fichier soit infecté et signalé par l'antivirus. (1 point)
3. Montrer que la probabilité que le fichier soit signalé est $P(S) = 0,1228$. (1,5 points)
4. Le fichier est signalé. Calculer la probabilité qu'il soit réellement infecté. Interpréter le résultat. (1,5 points)
5. Le fichier n'est pas signalé. Calculer la probabilité qu'il soit tout de même infecté. (1,5 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

Les données de l'énoncé donnent $P(I) = 0,08$, $P_I(S) = 0,96$ et $P_{\bar{I}}(S) = 0,05$. Par complémentarité, $P(\bar{I}) = 0,92$, $P_I(\bar{S}) = 0,04$ et $P_{\bar{I}}(\bar{S}) = 0,95$.

Premier niveau	Second niveau	Probabilités des branches
I (probabilité 0,08)	$S ; \bar{S}$	0,96 ; 0,04
$\bar{I}$ (probabilité 0,92)	$S ; \bar{S}$	0,05 ; 0,95

Pour chaque nœud, la somme des probabilités des branches qui en sont issues vaut 1.

Barème : 0,5 point pour les probabilités $P(I)$ et $P(\bar{I})$; 0,5 point pour les quatre probabilités conditionnelles du second niveau.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1 point)

$$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0,08 \times 0,96.$$

$$P(I \cap S) = 0,0768.$$

Barème : 0,5 point pour la formule $P(I \cap S) = P(I) P_I(S)$; 0,5 point pour la valeur.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1,5 points)

I et $\bar{I}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(I \cap S) + P(\bar{I} \cap S) = 0,0768 + 0,92 \times 0,05 = 0,0768 + 0,046.$$

$$P(S) = 0,1228.$$

Barème : 0,5 point pour la partition $\{I, \bar{I}\}$ citée ; 0,5 point pour le calcul de $P(\bar{I} \cap S)$; 0,5 point pour la somme.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1,5 points)

$$\text{On cherche } P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0,0768}{0,1228} \approx 0,625.$$

Lorsque l'antivirus signale un fichier, ce fichier est réellement infecté avec une probabilité d'environ 62,5 % : plus d'un fichier signalé sur trois est un faux positif, car les fichiers infectés sont rares.

Barème : 0,5 point pour l'écriture de $P_S(I)$ et sa définition ; 0,5 point pour la valeur numérique ; 0,5 point pour l'interprétation.

Correction de l'exercice 1, question 5

Question 5 (1,5 points)

$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,1228 = 0,8772$ et $P(I \cap \overline{S}) = P(I) \times P_I(\overline{S}) = 0,08 \times 0,04 = 0,0032$.

$$P_{\overline{S}}(I) = \frac{P(I \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0,0032}{0,8772} \approx 0,004.$$

Un fichier non signalé est infecté avec une probabilité d'environ 0,4 %.

Barème : 0,5 point pour $P(\overline{S})$; 0,5 point pour $P(I \cap \overline{S})$; 0,5 point pour le quotient et la conclusion.

Exercice 2 (6 points) : Indépendance

Un club sportif compte 500 adhérents. On interroge un adhérent au hasard. On note A l'événement « l'adhérent pratique la natation » et B l'événement « l'adhérent a moins de 30 ans ». Les effectifs sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	B	$\overline{B}$	Total
A	120	180	300
$\overline{A}$	80	120	200
Total	200	300	500

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$. (1,5 points)
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ? (1 point)
3. Soit A et B deux événements indépendants d'un même univers. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants. (2 points)
4. Soit E et F deux événements tels que $P(E) = 0,5$, $P(F) = 0,4$ et $P(E \cup F) = 0,7$. Les événements E et F sont-ils indépendants ? (1,5 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1,5 points)

Les événements sont équiprobables et l'effectif total est 500.

$$P(A) = \frac{300}{500} = 0,6, P(B) = \frac{200}{500} = 0,4 \text{ et } P(A \cap B) = \frac{120}{500} = 0,24.$$

Barème : 0,5 point pour $P(A)$; 0,5 point pour $P(B)$; 0,5 point pour $P(A \cap B)$.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1 point)

$$P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,4 = 0,24 = P(A \cap B).$$

Par définition, A et B sont **indépendants**. Autrement dit, $P_A(B) = \frac{120}{300} = 0,4 = P(B)$: connaître la discipline ne change pas la proportion de moins de 30 ans.

Barème : 0,5 point pour le calcul des deux membres ; 0,5 point pour la conclusion par la définition.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2 points)

On cherche à montrer que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$.

Les événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles et leur réunion est A . Donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, soit $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Ainsi :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Barème : 1 point pour la décomposition $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ justifiée ; 1 point pour l'utilisation de l'indépendance, la factorisation et la conclusion.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1,5 points)

D'après la formule $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$:

$$P(E \cap F) = 0,5 + 0,4 - 0,7 = 0,2.$$

$$\text{Or } P(E) \times P(F) = 0,5 \times 0,4 = 0,2 = P(E \cap F).$$

Les événements E et F sont **indépendants**.

Barème : 0,5 point pour la formule de la réunion ; 0,5 point pour $P(E \cap F) = 0,2$; 0,5 point pour la comparaison et la conclusion.

Exercice 3 (7,5 points) : Séance de tirs au but

Un joueur effectue une série de tirs au but. À chaque tir, il marque avec la probabilité $0,7$, et les tirs sont supposés indépendants les uns des autres. Il effectue d'abord **3** tirs. On note B l'événement « le tir est réussi » et $\overline{B}$ l'événement « le tir est manqué ».

Pour la question 5, on utilise le script Python suivant.

```
from random import random

def tirs():
    reussites = 0
    for i in range(3):
        if random() < 0.7:
            reussites = reussites + 1
    return reussites

def estimation(N):
    compteur = 0
    for k in range(N):
        if tirs() == 3:
            compteur = compteur + 1
    return compteur / N

print(estimation(100000))
```

1. Calculer la probabilité qu'il marque les trois tirs. En déduire la probabilité qu'il manque au moins un tir. (1 point)
2. Calculer la probabilité qu'il marque exactement deux buts. (1,5 points)
3. Sachant qu'il a marqué exactement deux buts, quelle est la probabilité que le premier tir ait été manqué ? (1,5 points)
4. Le joueur effectue maintenant n tirs ($n \geq 1$). Exprimer en fonction de n la probabilité de marquer au moins un but, puis déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n pour lequel cette probabilité est supérieure ou égale à $0,999$. (2 points)
5. On exécute le script Python de l'introduction de l'exercice. Expliquer ce que simule la fonction `tirs`, ce que renvoie `estimation(N)`, puis indiquer de quelle valeur la valeur affichée est proche. (1,5 points)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1 point)

Les tirs sont indépendants : $P(\text{trois buts}) = 0,7 \times 0,7 \times 0,7 = 0,343$.

L'événement « manquer au moins un tir » est le contraire de « marquer les trois tirs » : sa probabilité est $1 - 0,343 = 0,657$.

Barème : 0,5 point pour 0,343 avec l'indépendance citée ; 0,5 point pour 0,657 par l'événement contraire.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1,5 points)

Il y a trois issues réalisant l'événement : le tir manqué est le premier, le deuxième ou le troisième (issues $\overline{B}BB$, $B\overline{B}B$ et $BB\overline{B}$).

Chacune a pour probabilité $0,7^2 \times 0,3 = 0,147$ (indépendance des tirs).

$$P(\text{exactement deux buts}) = 3 \times 0,147 = 0,441.$$

Barème : 0,5 point pour les trois chemins ; 0,5 point pour la probabilité d'un chemin ; 0,5 point pour la somme.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

Notons D « exactement deux buts » et M « le premier tir est manqué ». Alors $M \cap D$ correspond au seul chemin $\overline{B}BB$: $P(M \cap D) = 0,3 \times 0,7 \times 0,7 = 0,147$.

$$P_D(M) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0,147}{0,441} = \frac{1}{3}.$$

Barème : 0,5 point pour $P(M \cap D)$; 0,5 point pour la définition de $P_D(M)$; 0,5 point pour le résultat $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (2 points)

Le contraire de « marquer au moins un but » est « manquer les n tirs », de probabilité $0,3^n$ (tirs indépendants). Donc $p_n = 1 - 0,3^n$.

On cherche n tel que $1 - 0,3^n \geq 0,999$, soit $0,3^n \leq 0,001$.

Pour $n = 5$: $0,3^5 = 0,00243 > 0,001$. Pour $n = 6$: $0,3^6 = 0,000729 \leq 0,001$.

La suite $(0,3^n)$ est décroissante, donc l'inégalité reste vraie pour $n \geq 6$.

Le plus petit entier est $n = 6$.

Barème : 0,5 point pour $p_n = 1 - 0,3^n$ justifié ; 0,5 point pour l'inéquation équivalente ; 1 point pour les essais $n = 5$ et $n = 6$ et la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (1,5 points)

La fonction `tirs` simule une série de 3 tirs indépendants : à chaque tir, `random()` renvoie un nombre aléatoire de $[0; 1[$ et le tir est réussi lorsque ce nombre est strictement inférieur à 0,7. Elle renvoie le nombre de buts marqués.

La fonction `estimation(N)` répète N fois la série et renvoie la fréquence des séries comportant exactement deux buts.

Pour $N = 100\,000$ répétitions, la fréquence observée est en général proche de la probabilité calculée à la question 2 : la valeur affichée est voisine de 0,441.

Barème : 0,5 point pour `tirs` : 3 tirs avec probabilité 0,7, nombre de buts ; 0,5 point pour `estimation` : fréquence de « exactement deux buts » ; 0,5 point pour la valeur voisine de 0,441.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6,5
Exercice 2	6
Exercice 3	7,5
Total	20