

Géométrie repérée : le cours

Un GPS, un jeu vidéo, un phare dont le faisceau balaie la mer : tous utilisent des **équations de droites et de cercles**. Dans ce chapitre, tu apprends à **traduire une figure en équations**, puis à calculer avec.

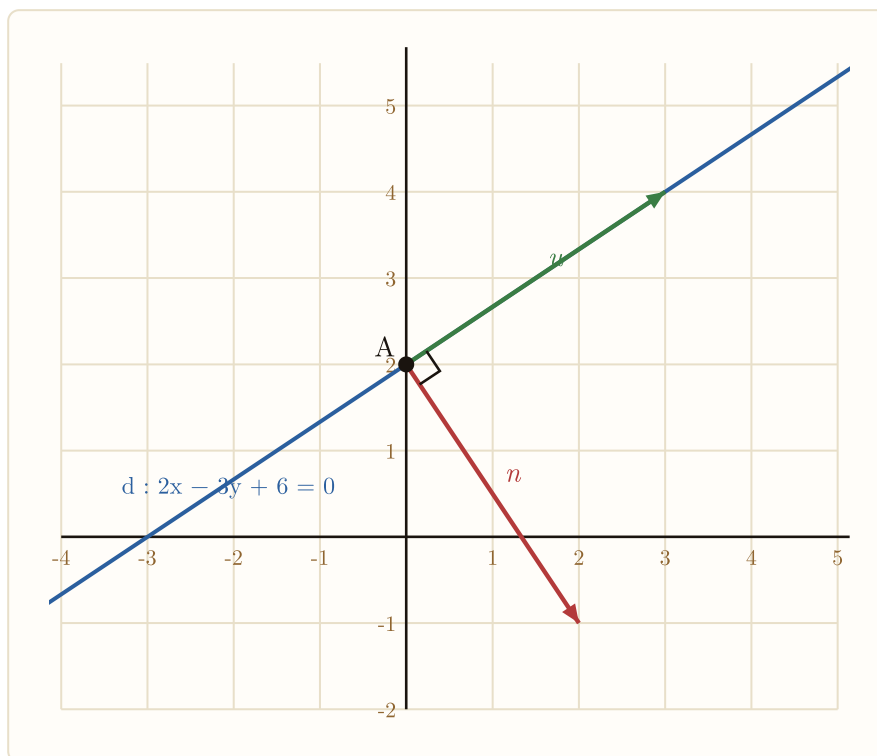
Tout se passe dans un **repère orthonormé**. Le produit scalaire du chapitre précédent sert ici d'outil principal.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Retiens le fil rouge : **un vecteur normal donne l'équation, un produit scalaire nul donne la perpendiculaire**.
- Pour un cercle, retiens deux réflexes : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ pour un diamètre $[AB]$.
- Pour un projeté orthogonal, retiens : **le point de la droite dont le vecteur vers M est colinéaire au vecteur normal**.

1. Équations de droites et vecteurs normaux



La droite d , un vecteur normal $n(2 ; -3)$ et un vecteur directeur $u(3 ; 2)$

Définition. Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur **non nul orthogonal** à un **vecteur directeur** de d . Il est donc orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ pour tous points A et B de d .

Propriété. Toute droite du plan admet une **équation cartésienne** de la forme

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a; b) \neq (0; 0)$$

- $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** à la droite ;
- $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de la droite ;
- réciproquement, toute équation $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est celle d'une droite.

Exemple. $d : 2x - 3y + 6 = 0$. Un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le point $A(0; 2)$ est sur d car $0 - 6 + 6 = 0$.

Pourquoi $(a; b)$ est normal. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de la droite $ax + by + c = 0$. Ils vérifient $ax_A + by_A + c = 0$ et $ax_B + by_B + c = 0$. En soustrayant les deux égalités :

$$a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{avec } \vec{n}(a; b)$$

Le vecteur $\vec{n}$ est non nul et orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ de la droite : c'est un vecteur normal. Comme $\vec{n} \cdot \vec{u} = -ab + ba = 0$ et que, dans le plan, tous les vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$ sont colinéaires, $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur. $\square$

Propriété (droite définie par un point et un vecteur normal). La droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

En effet, M est sur la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est nul ou directeur, c'est-à-dire orthogonal à $\vec{n}$. En développant, on retrouve la forme $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A - by_A$.

Exemple. Droite passant par $A(1; 2)$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$: $3(x - 1) - (y - 2) = 0$, soit $3x - y - 1 = 0$.

Parallèles et perpendiculaires. Soient $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$.

- d et d' sont **parallèles ou confondues** si et seulement si les vecteurs normaux sont **colinéaires** : $ab' - a'b = 0$;
- $d \perp d'$ si et seulement si les vecteurs normaux sont **orthogonaux** : $aa' + bb' = 0$.

Exemple. $3x + 2y - 6 = 0$ est parallèle à $3x + 2y - 5 = 0$ et perpendiculaire à $2x - 3y + 1 = 0$, car $3 \times 2 + 2 \times (-3) = 0$.

Équation réduite. Une droite **non verticale** a une équation $y = mx + p$. Le coefficient directeur est m et un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Une droite **verticale** a une équation $x = k$: elle n'a pas d'équation réduite.

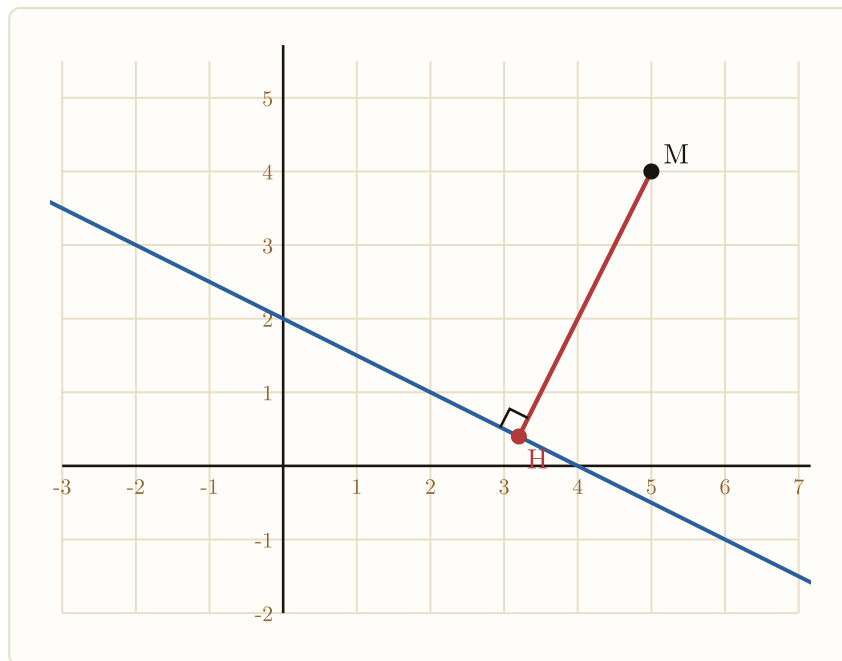
Astuce. Pour l'équation de la droite (AB) , calcule $\overrightarrow{AB}$: il est vecteur directeur. Un vecteur normal s'en déduit en échangeant les coordonnées et en changeant un signe : si $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, alors $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pièges :

- Une droite a **une infinité d'équations cartésiennes** : on peut multiplier par un réel non nul.
- Ne confonds pas **vecteur normal** $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et **vecteur directeur** $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- Le coefficient c se **calcule** : on remplace x et y par les coordonnées d'un point de la droite.
- La condition $ab' - a'b = 0$ inclut le cas de deux droites **confondues** : pour les distinguer, teste si un point de d est sur d' .
- Les formules de perpendicularité supposent un repère **orthonormé**.

Confondre normal et directeur, c'est dire « tourne à gauche » alors que tu voulais dire « continue tout droit » : le GPS est perdu.

2. Projeté orthogonal d'un point sur une droite



H est le projeté orthogonal de $M(5; 4)$ sur la droite $d : x + 2y - 4 = 0$

Définition. Le **projeté orthogonal** de M sur la droite d est le point H de d tel que $\overrightarrow{MH}$ soit orthogonal à d , c'est-à-dire **colinéaire à un vecteur normal $\vec{n}$ de d** . Si $M \in d$, alors $H = M$.

Deux méthodes pour calculer H quand $d : ax + by + c = 0$ (vecteur normal $\vec{n}(a; b)$) :

- **Méthode 1 (paramètre).** On écrit $H = M + t\vec{n}$, soit $H(x_M + ta; y_M + tb)$, puis on exprime que $H \in d$ pour trouver t .
- **Méthode 2 (perpendiculaire).** On écrit l'équation de la perpendiculaire Δ à d passant par M (le vecteur $\vec{n}$ est directeur de Δ), puis H est le point d'intersection de d et Δ .

Exemple. $M(5; 4)$ et $d : x + 2y - 4 = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(1; 2)$.

Méthode 1. $H(5 + t; 4 + 2t) \in d$ donne $5 + t + 8 + 4t - 4 = 0$, soit $5t = -9$ et $t = -\frac{9}{5}$. Donc $H\left(5 - \frac{9}{5}; 4 - \frac{18}{5}\right) = \left(\frac{16}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Méthode 2. Un vecteur normal à Δ est $(2; -1)$, orthogonal à $\vec{n}$: $\Delta : 2x - y + c = 0$ et $M \in \Delta$ donne $10 - 4 + c = 0$, soit $c = -6$. On résout $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$: on trouve $x = \frac{16}{5}$ et $y = \frac{2}{5}$.

On vérifie dans d : $\frac{16}{5} + \frac{4}{5} - 4 = 0$.

La **distance de M à la droite d** est la longueur MH . Ici $\overrightarrow{MH} = t\vec{n}$, donc $MH = |t| \|\vec{n}\| = \frac{9}{5}\sqrt{5} = \frac{9\sqrt{5}}{5} \approx 4,02$.

Un algorithme en Python. La méthode 1 se programme en quelques lignes : résoudre l'équation en t donne directement t .

```
def projete(xM, yM, a, b, c):
    # projeté orthogonal de M sur la droite ax + by + c = 0
    t = -(a * xM + b * yM + c) / (a**2 + b**2)
    return round(xM + t * a, 6), round(yM + t * b, 6)

print(projete(5, 4, 1, 2, -4)) # affiche (3.2, 0.4)
```

Astuce. Pour vérifier un projeté, contrôle deux choses : H est bien **sur la droite**, et $\overrightarrow{MH}$ est **colinéaire** à $\vec{n}$.

Pièges :

- Le projeté n'est **pas** le point de d qui a la même abscisse que M (sauf cas particulier).
- Dans $H = M + t\vec{n}$, utilise bien un vecteur **normal** et non un vecteur directeur.
- La distance MH vaut $|t| \|\vec{n}\|$: n'oublie pas la norme de $\vec{n}$.

3. Équation d'un cercle

Propriété. Le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\Omega M = r$, c'est-à-dire

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

En développant, on obtient une équation de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Exemple. Le cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3 a pour équation $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$, soit $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

Reconnaître un cercle. Pour étudier $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$, on **regroupe en carrés** (forme canonique) :

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + q^2}{4} - s$$

- Si le second membre est **strictement positif** : c'est un **cercle** ;
- s'il est **nul** : c'est un **point** (le centre) ;
- s'il est **négatif** : l'ensemble est **vide**.

Exemple. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ s'écrit $(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0$, soit $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$: cercle de centre $(3; -2)$ et de rayon 4.

Un algorithme en Python. On programme le test sur le signe du second membre :

```
def cercle(p, q, s):
    # étudie  $x^2 + y^2 + p x + q y + s = 0$ 
    k = (p**2 + q**2) / 4 - s
    if k > 0:
        return "cercle", (-p / 2, -q / 2), k ** 0.5
    if k == 0:
        return "point", (-p / 2, -q / 2)
    return "ensemble vide"

print(cercle(-6, 4, -3)) # affiche ('cercle', (3.0, -2.0), 4.0)
```

Cercle de diamètre $[AB]$. C'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (démontré au chapitre précédent). Son centre est le milieu I de $[AB]$ et son rayon vaut $\frac{AB}{2}$.

Astuce. Pour le cercle de diamètre $[AB]$, la méthode $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ donne l'équation directement : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

Un peu d'histoire. Les cercles font partie des plus vieux objets mathématiques. La caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ comme ensemble des points M tels que le triangle AMB soit rectangle en M semble remonter à Thalès. Mais ce n'est qu'au XVII^e siècle que Descartes élabore la méthode des coordonnées et écrit l'équation d'un cercle en repère orthonormé.

Pièges :

- Dans $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, le **second membre est r^2** , pas r .
- Le centre est $(a; b)$ avec les **signes opposés** : $(x + 1)^2$ correspond à $a = -1$.
- Avant de dire « c'est un cercle », vérifie que le second membre est **strictement positif**.

Un cercle de rayon négatif, c'est comme une pizza de diamètre -30 cm : la livraison est impossible.

4. Cercle et droite parallèle à un axe, tangente

Intersection avec une droite parallèle à un axe. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r . Pour la droite $x = k$, on remplace x par k dans l'équation du cercle :

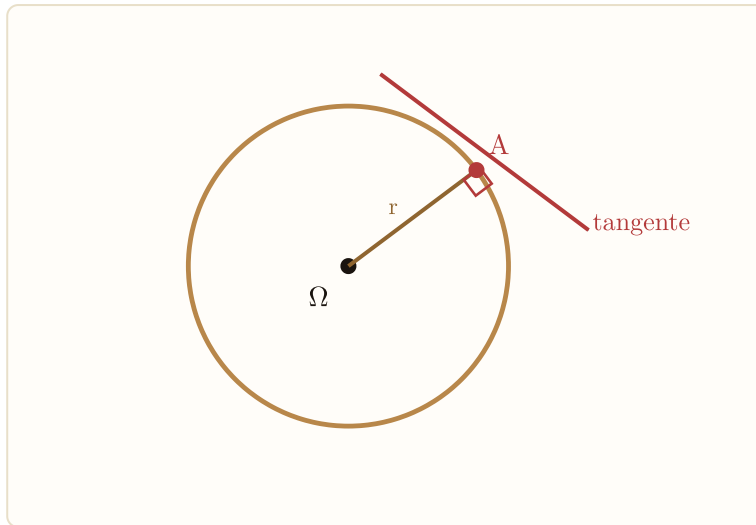
$$(y - b)^2 = r^2 - (k - a)^2$$

On note $m = r^2 - (k - a)^2$. Si $m > 0$, il y a **deux points** $(k; b \pm \sqrt{m})$; si $m = 0$, **un seul point** $(k; b)$; si $m < 0$, **aucun point**. Pour une droite $y = k$, on procède de même avec $(x - a)^2 = r^2 - (k - b)^2$.

Exemple. Cercle $x^2 + y^2 = 25$. La droite $y = 3$ donne $x^2 = 16$, donc les points $(-4; 3)$ et $(4; 3)$. La droite $x = 5$ donne $y^2 = 0$, donc le seul point $(5; 0)$. La droite $x = 6$ donne $y^2 = -11$: aucun point.

Tangente en un point du cercle. Soit A un point du cercle de centre Ω . La **tangente** en A est la droite passant par A et perpendiculaire à (ΩA) (propriété vue au collège). Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est donc normal à la tangente :

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$



La tangente en A est perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$

Exemple. Cercle de centre $\Omega(1; 2)$ et de rayon 5, $A(4; 6)$. $\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc la tangente est $3(x - 4) + 4(y - 6) = 0$, soit $3x + 4y - 36 = 0$.

Lien avec l'intersection. Dans l'exemple $x^2 + y^2 = 25$ et $x = 5$, le seul point commun est $A(5; 0)$. Le rayon $[OA]$ est horizontal et la droite $x = 5$ est verticale : elles sont perpendiculaires, donc $x = 5$ est bien la tangente en A .

Pièges :

- Vérifie que A est **bien sur le cercle** avant de chercher la tangente.
- Pour la droite $x = k$, substitue $x = k$ et résous en y ; pour la droite $y = k$, substitue $y = k$ et résous en x .
- Après avoir trouvé une coordonnée, **donne l'autre** : un point d'intersection a deux coordonnées.

Une tangente qui coupe le cercle en deux points n'est plus une tangente : c'est une sécante qui a changé de nom.

5. Utiliser un repère pour étudier une configuration

Méthode en trois temps :

- **Traduire** chaque donnée en équation (droite, cercle, condition de produit scalaire) ;
- **Résoudre** le système ou **calculer** avec les coordonnées ;
- **Conclure** par une phrase : « donc le point H a pour coordonnées... », « donc l'ensemble est la courbe d'équation... ».

Exemple (approfondissement du programme : points équidistants de l'axe des abscisses et d'un point).

Quel est l'ensemble des points $M(x; y)$ équidistants de l'axe des abscisses et du point $F(0; 2)$?

Le projeté orthogonal de M sur l'axe est $(x; 0)$, donc la distance de M à l'axe est $|y|$. Deux nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont :

$$|y| = MF \iff y^2 = x^2 + (y - 2)^2 \iff x^2 - 4y + 4 = 0 \iff y = \frac{x^2}{4} + 1$$

L'ensemble cherché est la **parabole** d'équation $y = \frac{x^2}{4} + 1$, de sommet $(0; 1)$.

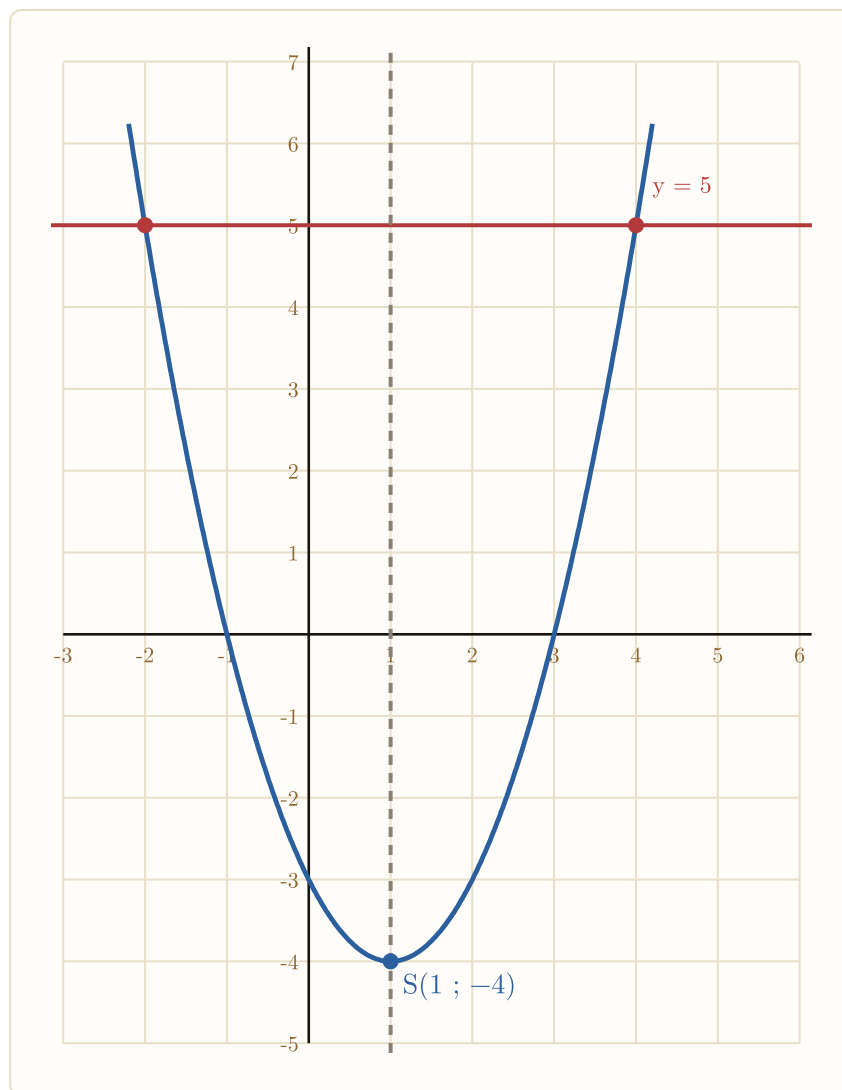
Astuce. Les **trois hauteurs** d'un triangle sont concourantes en un point, l'**orthocentre** (c'est un approfondissement du programme sur le produit scalaire).

Les **trois médiatrices** sont concourantes au centre du **cercle circonscrit**.

Calcule deux droites, trouve leur intersection, puis **vérifie avec la troisième**.

6. Approfondissement du programme : parabole et droite parallèle à un axe

La courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une **parabole**. Le chapitre 1 donne ses éléments (axe de symétrie $x = -\frac{b}{2a}$, sommet) ; on étudie ici son intersection avec une droite **parallèle à un axe**.



La parabole $y = x^2 - 2x - 3$, son sommet S et la droite $y = 5$

- Avec la droite $y = k$: on résout l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = k$ (discriminant du chapitre 1) ;
- avec la droite $x = k$: il y a **un seul point commun**, $(k; ak^2 + bk + c)$.

Exemple. $y = x^2 - 2x - 3$. Le sommet est $S(1; -4)$. Avec $y = 5$: $x^2 - 2x - 8 = 0$, $\Delta = 36$, donc $x = -2$ ou $x = 4$. Les points communs sont $(-2; 5)$ et $(4; 5)$. Avec $x = 3$: le seul point commun est $(3; 0)$.

Pour aller plus loin, hors programme : une droite quelconque et un cercle

Le programme se limite aux droites parallèles aux axes. Pour une droite **oblique**, on substitue encore l'équation de la droite dans celle du cercle, ce qui donne une équation du second degré.

Exemple. Cercle $x^2 + y^2 = 25$ et droite $y = x + 1$: $x^2 + (x + 1)^2 = 25$, soit $x^2 + x - 12 = 0$, donc $x = 3$ ou $x = -4$. Les points sont $(3; 4)$ et $(-4; -3)$.

Cette méthode n'est **pas exigible** : si un exercice la demande, l'énoncé la fournit.

Tu as maintenant le cours. Passe aux trois fiches, aux exercices de synthèse, puis au Guide de rédaction du chapitre.