

Géométrie repérée : exercices de synthèse

Trois exercices complets, au format d'un devoir :

- un **triangle** : hauteurs, orthocentre, cercle circonscrit, projeté orthogonal et tangente ;
- un **ensemble de points** équidistants de l'axe des abscisses et d'un point, et son intersection avec des droites parallèles aux axes ;
- un **problème de modélisation** avec le phare, un projeté orthogonal et un script Python.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- **vecteur normal** écrit avant chaque équation ;
- **vérification** par une troisième droite ou un point ;
- **conclusion** en une phrase.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

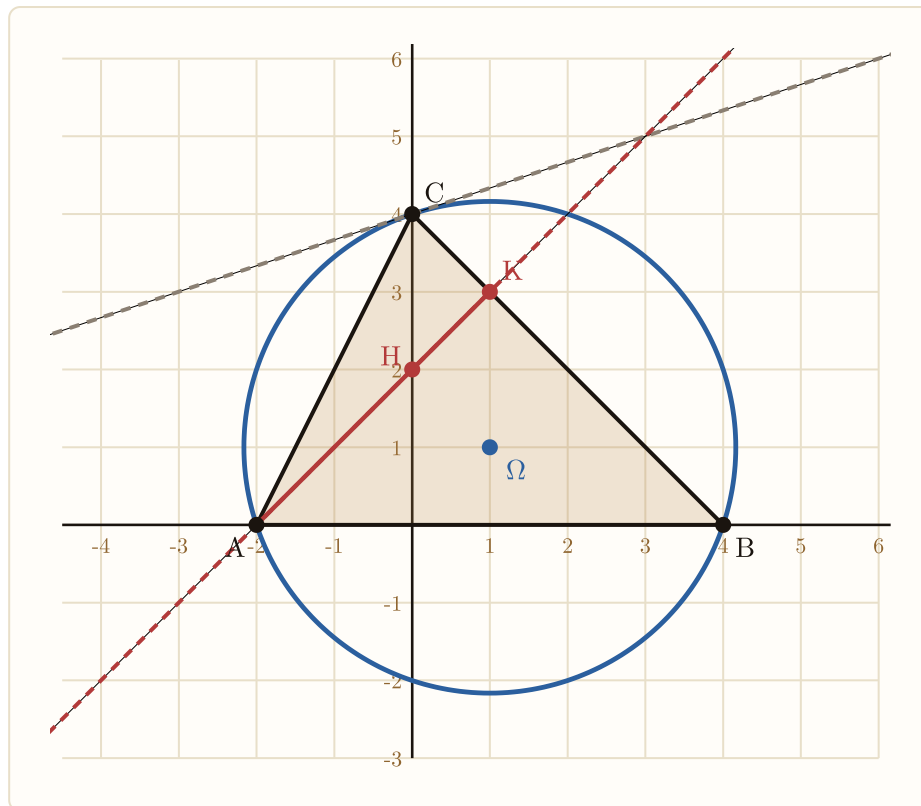
Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Fais une **figure** même quand l'énoncé n'en demande pas.
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus ».

Exercice 1 : un triangle complet

Dans un repère orthonormé, $A(-2; 0)$, $B(4; 0)$ et $C(0; 4)$.

1. Déterminer les équations des hauteurs issues de A et de B , puis l'orthocentre H .
2. Déterminer les équations des médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$, puis le centre Ω et une équation du cercle circonscrit.
3. Déterminer le projeté orthogonal K de A sur la droite (BC) , puis calculer AK et l'aire du triangle ABC .
4. Déterminer l'équation de la tangente au cercle circonscrit en C .



Cercle circonscrit, hauteur issue de A (rouge), projeté K de A sur (BC) et tangente en C

Correction de la question 1

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à la hauteur issue de A : $-4(x+2) + 4y = 0 \iff y = x + 2$.

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à la hauteur issue de B : $2(x-4) + 4y = 0 \iff x + 2y - 4 = 0$.

On résout : $y = x + 2$ donne $x + 2x + 4 - 4 = 0$, donc $x = 0$ et $y = 2$.

Vérification : la hauteur issue de C est $x = 0$ (perpendiculaire à l'axe (AB)) et contient $(0; 2)$.

$H(0; 2)$.

Correction de la question 2

Médiatrice de [AB] : milieu $(1; 0)$, normal $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $x = 1$.

Médiatrice de [BC] : milieu $(2; 2)$, normal $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$: $-4(x-2) + 4(y-2) = 0 \iff y = x$.

Intersection : $\Omega(1; 1)$. $\Omega A^2 = 9 + 1 = 10$, $\Omega B^2 = 9 + 1 = 10$ et $\Omega C^2 = 1 + 9 = 10$.

Le cercle circonscrit est $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

Correction de la question 3

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ est directeur de (BC) , donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal : $(BC) : x + y + c = 0$ et $B \in (BC)$ donne $c = -4$.

On pose $K = A + t\vec{n} = (-2 + t; t)$. $K \in (BC) \iff -2 + t + t - 4 = 0 \iff t = 3$, donc $K(1; 3)$.

$AK = |t| \|\vec{n}\| = 3\sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$, donc l'aire vaut $\frac{1}{2} \times BC \times AK = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 12$.

Vérification : K est sur la hauteur issue de A ($3 = 1 + 2$) et l'aire vaut aussi $\frac{1}{2} \times AB \times y_C = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$.

$K(1; 3)$, $AK = 3\sqrt{2}$ et l'aire de ABC vaut 12.

Correction de la question 4

$\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à la tangente en C .

$$-1(x - 0) + 3(y - 4) = 0 \iff -x + 3y - 12 = 0.$$

La tangente en C est $x - 3y + 12 = 0$.

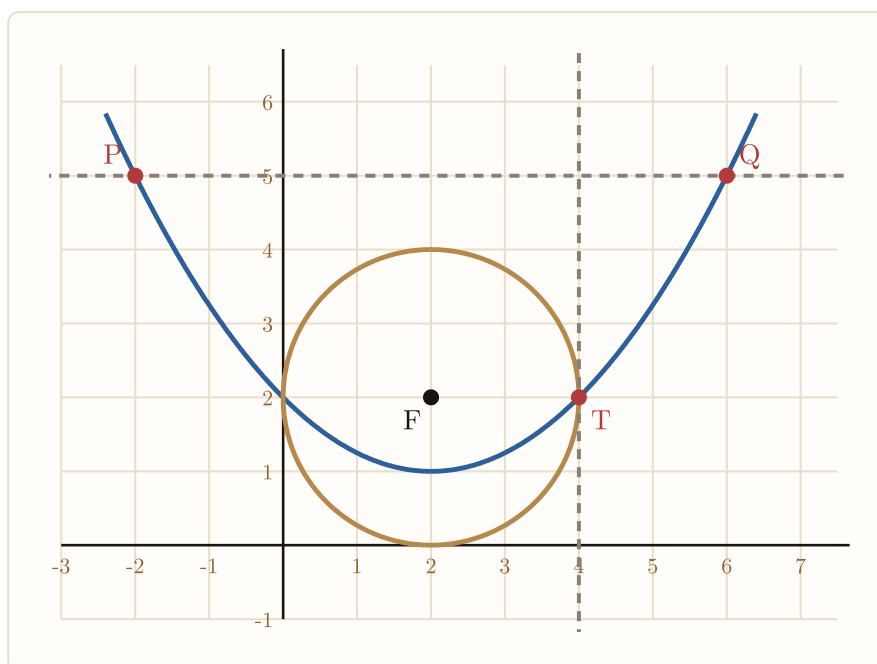
Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : deux hauteurs, intersection, **vérification** avec la troisième.
- **Q2** : deux médiatrices et **vérification** avec les trois distances.
- **Q3** : vecteur normal de (BC) , projeté orthogonal par $K = A + t\vec{n}$, vérification par l'aire calculée autrement.
- **Q4** : tangente perpendiculaire au rayon.

Exercice 2 : points équidistants d'un axe et d'un point

Dans un repère orthonormé, $F(2; 2)$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M équidistants de l'axe des abscisses et du point F .

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est la courbe d'équation $y = \frac{(x-2)^2}{4} + 1$.
2. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{E}$ avec la droite $y = 5$.
3. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre F et de rayon 2. Déterminer son intersection avec la droite $x = 4$, puis vérifier que le point obtenu appartient à $\mathcal{E}$ et que la droite est tangente à $\mathcal{C}$.



L'ensemble $\mathcal{E}$ (parabole), le cercle de centre F et de rayon 2 et les droites $y = 5$ et $x = 4$

Correction de la question 1

La distance de $M(x; y)$ à l'axe des abscisses est $|y|$ (son projeté orthogonal est $(x; 0)$).

$M \in \mathcal{E} \iff |y| = MF \iff y^2 = MF^2 \iff y^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$ (deux nombres positifs ont des carrés dans le même ordre).

On développe : $0 = (x-2)^2 - 4y + 4 \iff y = \frac{(x-2)^2}{4} + 1$.

$\mathcal{E}$ est la parabole d'équation $y = \frac{(x-2)^2}{4} + 1$.

Correction de la question 2

Avec $y = 5$: $\frac{(x-2)^2}{4} = 4 \iff (x-2)^2 = 16 \iff x-2 = \pm 4$.

Les points sont $P(-2; 5)$ et $Q(6; 5)$.

Correction de la question 3

$\mathcal{C} : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Avec $x = 4 : 4 + (y - 2)^2 = 4 \iff y = 2$. Un seul point commun : $T(4; 2)$.

$T \in \mathcal{E}$ car $\frac{(4 - 2)^2}{4} + 1 = 2$. Le rayon $[FT]$ est horizontal et la droite $x = 4$ est verticale : elles sont perpendiculaires en T .

La droite $x = 4$ est tangente à $\mathcal{C}$ en $T(4; 2)$, et T appartient à $\mathcal{E}$.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : passage au carré **justifié**, puis développement.
- **Q2** : substitution de $y = 5$, deux solutions, conclusion avec les deux coordonnées.
- **Q3** : substitution de $x = 4$, une seule solution, tangente perpendiculaire au rayon.

Exercice 3 : le phare, avec Python

Un phare est en $O(0; 0)$ (unité : le km) avec une portée de 5 km. Un bateau suit la droite d : $3x + 4y = 20$.

1. Déterminer le projeté orthogonal I de O sur d , puis la distance OI .
2. Soient P et Q les points de d situés à 5 km du phare. Calculer la longueur PQ du trajet éclairé.
3. Déterminer les coordonnées de P et de Q .
4. On exécute le script suivant. Prévoir l'affichage et conclure.

```
from math import sqrt

def projete(xM, yM, a, b, c):
    # projeté orthogonal de M sur la droite ax + by + c = 0
    t = -(a * xM + b * yM + c) / (a**2 + b**2)
    return round(xM + t * a, 6), round(yM + t * b, 6)

xI, yI = projete(0, 0, 3, 4, -20)
print(xI, yI, round(sqrt(xI**2 + yI**2), 6))
for (x, y) in ((0, 5), (4.8, 1.4)):
    print(x, y, round(x**2 + y**2, 6))
```

Correction de la question 1

Un vecteur normal à $d : 3x + 4y - 20 = 0$ est $\vec{n}(3; 4)$. On pose $I = O + t\vec{n} = (3t; 4t)$.

$$I \in d \iff 9t + 16t - 20 = 0 \iff t = \frac{4}{5}, \text{ donc } I\left(\frac{12}{5}; \frac{16}{5}\right) = (2,4; 3,2).$$

$$OI = |t| \|\vec{n}\| = \frac{4}{5} \times 5 = 4.$$

$I(2,4; 3,2)$ est le projeté orthogonal de O sur d : le bateau passe à 4 km du phare au plus près.

Correction de la question 2

Soit $P \in d$ avec $OP = 5$. Comme I est le projeté orthogonal de O , le triangle OIP est rectangle en I : $IP^2 = OP^2 - OI^2 = 25 - 16 = 9$, donc $IP = 3$.

Les deux points de d à 5 km de O sont de part et d'autre de I , à 3 km de I .

$$PQ = 6 \text{ km.}$$

Correction de la question 3

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(-4; 3)$, de norme 5. Le vecteur $\frac{3}{5}\vec{u} \begin{pmatrix} -2,4 \\ 1,8 \end{pmatrix}$ a pour norme 3.

$$P = I + \frac{3}{5}\vec{u} = (0; 5) \text{ et } Q = I - \frac{3}{5}\vec{u} = (4,8; 1,4).$$

Vérification : $3 \times 0 + 4 \times 5 = 20$, $3 \times 4,8 + 4 \times 1,4 = 20$, et $0^2 + 5^2 = 4,8^2 + 1,4^2 = 25$.

$P(0; 5)$ et $Q(4,8; 1,4)$.

Correction de la question 4

Le script affiche 2.4 3.2 4.0 (coordonnées de I et distance OI), puis 0 5 25 et 4.8 1.4 25.0.

Les deux points sont bien à 5 km du phare, et I est à 4 km.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : vecteur normal, $I = O + t\vec{n}$, calcul de OI .
- **Q2** : triangle OIP rectangle en I et théorème de Pythagore.
- **Q3** : vecteur directeur normé, coordonnées de P et Q **vérifiées**.
- **Q4** : lecture de la sortie du script.