

Géométrie repérée

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans tous les exercices.

Exercice S1 : Un triangle complet

Soit $A(-1; 0)$, $B(5; 0)$ et $C(1; 4)$.

1. Déterminer des équations des hauteurs issues de A et de B , puis les coordonnées de l'orthocentre H . Vérifier avec la hauteur issue de C .
2. Déterminer des équations des médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$, puis les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit et une équation de ce cercle.
3. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de ABC , puis exprimer $\overrightarrow{HG}$ en fonction de $\overrightarrow{H\Omega}$. Que peut-on dire de H , G et Ω ?

Exercice S2 : Cercle passant par trois points

Soit $P(0; 1)$, $Q(4; 1)$ et $R(0; -3)$.

1. Déterminer les réels p , q , s tels que le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ passe par P , Q et R .
2. Mettre l'équation sous forme canonique et donner le centre Ω et le rayon de $\mathcal{C}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$ et retrouver ainsi le centre Ω sans calcul d'équation.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point P .

Exercice S3 : Somme des carrés des distances

Soit $A(-2; 0)$ et $B(4; 0)$. Pour un réel k , on note $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

1. Montrer que $MA^2 + MB^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4x + 20$.
2. Montrer que $\mathcal{E}_{30}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Montrer que, pour tout réel k , $M \in \mathcal{E}_k \iff (x-1)^2 + y^2 = \frac{k-18}{2}$, puis discuter la nature de $\mathcal{E}_k$ selon les valeurs de k .

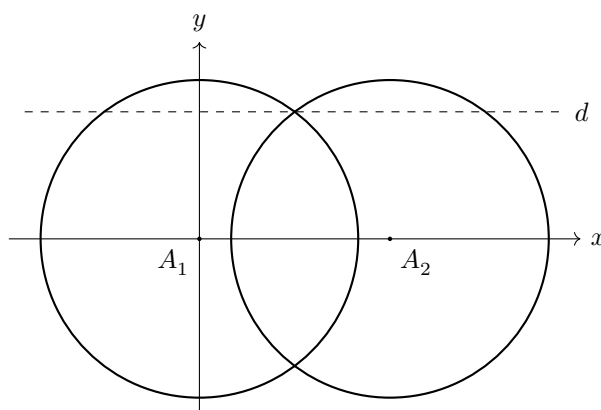
Exercice S4 : Droites d'une famille et cercle

Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 50$ et, pour tout réel m , la droite $d_m : y = x + m$.

1. Montrer que les abscisses des points communs à d_m et $\mathcal{C}$ sont les solutions de $2x^2 + 2mx + m^2 - 50 = 0$.
2. Calculer le discriminant de cette équation et en déduire, selon m , le nombre de points communs à d_m et $\mathcal{C}$.
3. Pour $m = 10$, déterminer le point de contact T et vérifier que (OT) est perpendiculaire à d_{10} .
4. Pour $m = 6$, déterminer les points d'intersection E et F puis la longueur EF .

Exercice S5 : Couverture de deux antennes

Deux antennes sont placées en $A_1(0; 0)$ et $A_2(6; 0)$ (unité : le kilomètre). Chacune a une portée de 5 km : un navire est couvert par une antenne s'il est à une distance inférieure ou égale à 5 km de celle-ci. Un navire se déplace à 18 km/h sur la droite $d : y = 4$, dans le sens des abscisses croissantes.



1. Écrire une équation de chacun des deux cercles limitant les zones couvertes.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des deux cercles.
3. Déterminer, pour chaque antenne, l'ensemble des positions du navire sur d où il est couvert.
4. Montrer que le navire est couvert sans interruption sur un trajet dont on donnera la longueur, puis la durée correspondante.

Exercice S6 : Points à coordonnées entières (Python)

On considère le script suivant.

```
n = 0
for x in range(-5, 6):
    for y in range(-5, 6):
        if x**2 + y**2 == 25:
            n = n + 1
print(n)
```

1. Quel cercle ce script étudie-t-il ? Lister les points concernés et en déduire la valeur affichée.
2. Modifier les trois lignes concernées pour étudier le cercle de centre $(1; -2)$ et de rayon 5.
3. Écrire une fonction `compter(n)` qui renvoie le nombre de points à coordonnées entières du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{n}$ (avec n entier positif).
4. Sans exécuter le programme, déterminer `compter(65)` en cherchant les écritures de 65 comme somme de deux carrés.

Exercice S7 : Distance d'un point à une droite

Soit $d : ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$, $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $M_0(x_0; y_0)$. On pose $H = M_0 + t\vec{n}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{M_0H} = t\vec{n}$, où t est un réel.

1. Écrire que $H \in d$ et en déduire $t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$.
2. Justifier que H est le projeté orthogonal de M_0 sur d , puis que $M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
3. Application : $d : 3x + 4y - 2 = 0$ et $\Omega(1; 2)$. Calculer la distance de Ω à d , puis déterminer une équation du cercle de centre Ω tangent à d et les coordonnées de son point de contact avec d .

Exercice S8 : Une famille de droites

Pour tout réel m , on considère l'ensemble d_m des points $M(x; y)$ tels que $(m+1)x + (m-2)y - 3m + 3 = 0$.

1. Montrer que, pour tout réel m , d_m est une droite.
2. Montrer que toutes les droites d_m passent par le point $P(1; 2)$.
3. Déterminer m pour que d_m soit parallèle à l'axe des abscisses.
4. Déterminer m pour que d_m soit perpendiculaire à la droite $\Delta : 2x - y + 5 = 0$. Donner alors une équation simplifiée de d_m .

5. Déterminer m pour que d_m passe par l'origine.
6. Montrer que la droite $\delta : x + y - 3 = 0$, qui passe par P , n'est aucune des droites d_m .

Exercice S9 : Tangentes issues d'un point

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 5, et $P(5; 10)$.

1. Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{C}$. La tangente à $\mathcal{C}$ en M passe par P si et seulement si $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$.
Montrer que cette condition équivaut à $x + 2y = 5$ pour un point M de $\mathcal{C}$.
2. En déduire les coordonnées des points de contact T_1 et T_2 des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par P .
3. Donner une équation de chacune de ces tangentes et vérifier qu'elles passent par P .
4. Calculer PT_1 et PT_2 . Que constate-t-on ?

Exercice S10 : Parabole, droite et cercle

Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y = x^2 - 4x + 1$ et d la droite d'équation $y = x - 3$.

1. Déterminer l'axe de symétrie et le sommet S de $\mathcal{P}$. Dans quel sens est-elle tournée ?
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathcal{P}$ et d , avec $x_A < x_B$.
3. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, puis son centre et son rayon.
4. Montrer que $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} > 0$ et en déduire la position de S par rapport à $\mathcal{C}$.

Exercice S11 : Lignes de niveau du produit scalaire

Soit $A(1; -1)$ et $B(5; 3)$.

1. Pour $M(x; y)$, exprimer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en fonction de x et y .
2. Pour tout réel k , déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (discuter selon k). Pour $k = 2$, on note Γ cet ensemble : en préciser le centre et le rayon.
3. Déterminer l'ensemble D des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$. Montrer que D est perpendiculaire à (AB) et déterminer son point d'intersection H avec (AB) .
4. Déterminer les points communs à D et Γ .