

Corrigé : Géométrie repérée

Fiche Standard

S1.

1. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à la hauteur issue de $A : -4(x+1) + 4y = 0 \iff y = x+1$.
 $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à la hauteur issue de $B : 2(x-5) + 4y = 0 \iff x+2y-5=0$.
 On remplace : $x+2(x+1)-5=0 \iff 3x=3$, donc $x=1$ et $y=2$.
 Vérification : (AB) est l'axe des abscisses, donc la hauteur issue de C est la droite $x=1$, qui contient $(1; 2)$.
Conclusion : $H(1; 2)$.
2. Médiatrice de $[AB]$: le milieu est $(2; 0)$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal, donc $x=2$.
 Médiatrice de $[BC]$: le milieu est $(3; 2)$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal : $-4(x-3)+4(y-2)=0 \iff y=x-1$.
 Pour $x=2 : y=1$. Vérification : $\Omega A^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, $\Omega B^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, $\Omega C^2 = 1^2 + 3^2 = 10$.
Conclusion : $\Omega(2; 1)$ et le cercle circonscrit est $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$.
3. $G \left(\frac{-1+5+1}{3}; \frac{0+0+4}{3} \right) = \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3} \right)$. $\overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{H\Omega} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{H\Omega}$.
Conclusion : les vecteurs sont colinéaires, donc H, G et Ω sont alignés (droite d'Euler).

S2.

1. $P \in \mathcal{C} : 1+q+s=0$. $Q \in \mathcal{C} : 16+1+4p+q+s=0$. $R \in \mathcal{C} : 9-3q+s=0$.
 $(Q) - (P) : 16+4p=0$, donc $p=-4$. $(R) - (P) : 8-4q=0$, donc $q=2$. Puis $s=-1-q=-3$.
Conclusion : $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.
2. $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 3 = 0 \iff (x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$.
Conclusion : centre $\Omega(2; -1)$ et rayon $2\sqrt{2}$.
3. $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donnent $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 : P$ est sur le cercle de diamètre $[QR]$. Le centre est donc le milieu de $[QR] : \left(\frac{4+0}{2}; \frac{1-3}{2} \right) = (2; -1)$, ce qui est bien Ω .
4. $\overrightarrow{\Omega P} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à la tangente en $P : -2(x-0) + 2(y-1) = 0 \iff y = x+1$.
Conclusion : la tangente en P est la droite $x - y + 1 = 0$.

S3.

1. $MA^2 = (x+2)^2 + y^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2$ et $MB^2 = (x-4)^2 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$. La somme vaut $2x^2 + 2y^2 - 4x + 20$.
2. $MA^2 + MB^2 = 30 \iff 2x^2 + 2y^2 - 4x - 10 = 0 \iff x^2 - 2x + y^2 = 5 \iff (x-1)^2 + y^2 = 6$.
Conclusion : $\mathcal{E}_{30}$ est le cercle de centre $I(1; 0)$ (milieu de $[AB]$) et de rayon $\sqrt{6}$.
3. $2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2$, donc $MA^2 + MB^2 = 2(x-1)^2 + 2y^2 + 18$. Ainsi $MA^2 + MB^2 = k \iff (x-1)^2 + y^2 = \frac{k-18}{2}$.

Si $k > 18$: cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k-18}{2}}$. Si $k = 18$: le seul point I . Si $k < 18$: ensemble vide.

Conclusion : la somme $MA^2 + MB^2$ est minimale en I et vaut alors 18.

S4.

1. $M \in d_m \cap \mathcal{C} \iff y = x+m$ et $x^2 + (x+m)^2 = 50$. Or $x^2 + (x+m)^2 - 50 = 2x^2 + 2mx + m^2 - 50$.
2. $\Delta = (2m)^2 - 4 \times 2 \times (m^2 - 50) = 4m^2 - 8m^2 + 400 = 4(100 - m^2)$.
 Si $|m| < 10 : \Delta > 0$, deux points. Si $m = \pm 10 : \Delta = 0$, un point (tangente). Si $|m| > 10 : \Delta < 0$, aucun point.
3. Pour $m = 10 : 2x^2 + 20x + 50 = 0 \iff 2(x+5)^2 = 0$, donc $x = -5$ et $y = 5 : T(-5; 5)$. Vérification : $25 + 25 = 50$. De plus $\overrightarrow{OT} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $d_{10} : x - y + 10 = 0$ (vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, colinéaire à $\overrightarrow{OT}$) : $(OT) \perp d_{10}$.
4. Pour $m = 6 : 2x^2 + 12x - 14 = 0 \iff x^2 + 6x - 7 = 0 \iff (x-1)(x+7) = 0$. Donc $x = 1, y = 7$ ou $x = -7, y = -1$. Vérification : $1 + 49 = 50$ et $49 + 1 = 50$.

$$EF = \sqrt{(1+7)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}.$$

Conclusion : $E(1; 7)$, $F(-7; -1)$ et $EF = 8\sqrt{2}$.

S5.

1. Les cercles sont $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 25$ et $\mathcal{C}_2 : (x-6)^2 + y^2 = 25$.
2. En soustrayant : $x^2 - (x-6)^2 = 0 \iff 12x - 36 = 0 \iff x = 3$. Puis $y^2 = 25 - 9 = 16$, donc $y = \pm 4$.

Conclusion : les cercles se coupent en $(3; 4)$ et $(3; -4)$.

3. Pour $M(x; 4) \in d$: couvert par $A_1 \iff x^2 + 16 \leq 25 \iff x^2 \leq 9 \iff -3 \leq x \leq 3$. Couvert par $A_2 \iff (x-6)^2 \leq 9 \iff 3 \leq x \leq 9$.
4. Les deux ensembles de positions sont $[-3; 3]$ et $[3; 9]$ (abscisses) : ils se raccordent en $x = 3$. Le navire est couvert pour $x \in [-3; 9]$, sans interruption, sur une longueur de 12 km. À 18 km/h, la durée est $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ h.

Conclusion : le navire est couvert sur 12 km pendant 40 minutes.

S6.

1. Le script compte les points à coordonnées entières de $[-5; 5]^2$ tels que $x^2 + y^2 = 25$, c'est-à-dire du cercle de centre O et de rayon 5. Ces points sont $(\pm 5; 0)$, $(0; \pm 5)$, $(\pm 3; \pm 4)$, $(\pm 4; \pm 3)$: $4+4+4 = 12$ points.

Conclusion : le script affiche 12.

2. Pour le centre $(1; -2)$ et le rayon 5 : $x \in [-4; 6]$ et $y \in [-7; 3]$.

```
for x in range(-4, 7):
    for y in range(-7, 4):
        if (x - 1)**2 + (y + 2)**2 == 25:
```

3.

```
def compter(n):
    r = int(n**0.5) + 1
    c = 0
    for x in range(-r, r + 1):
        for y in range(-r, r + 1):
            if x**2 + y**2 == n:
                c = c + 1
    return c
```

4. On cherche $a^2 + b^2 = 65$ avec $0 \leq a \leq b$; $a \leq 5$ car $2a^2 \leq 65$. Pour $a = 0, \dots, 5$: $65 - a^2 = 65, 64, 61, 56, 49, 40$; seuls 64 et 49 sont des carrés (pour $a = 1$ et $a = 4$). Donc $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ et aucune autre écriture. Points : $(\pm 1; \pm 8)$, $(\pm 8; \pm 1)$, $(\pm 4; \pm 7)$, $(\pm 7; \pm 4)$.

Conclusion : `compter(65)` renvoie $8 + 8 = 16$.

S7.

1. $H_{(x_0+ta, y_0+tb)} \in d \iff a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c = 0 \iff ax_0 + by_0 + c + t(a^2 + b^2) = 0$. Comme $a^2 + b^2 \neq 0$, $t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$.
2. $H \in d$ et $\overrightarrow{M_0H} = t\vec{n}$ est colinéaire au vecteur normal de d , donc orthogonal à d : H est le projeté orthogonal de M_0 sur d . Alors $M_0H = |t| \|\vec{n}\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
3. $3 \times 1 + 4 \times 2 - 2 = 9$ et $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$: la distance vaut $\frac{9}{5}$.

Le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{9}{5}$ a pour équation $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{81}{25}$. Il est tangent à d car d est perpendiculaire à (ΩH) en H , point du cercle.

Ici $t = -\frac{9}{25}$ et $H\left(1 - \frac{27}{25}; 2 - \frac{36}{25}\right) = \left(-\frac{2}{25}; \frac{14}{25}\right)$. Vérification : $3 \times \left(-\frac{2}{25}\right) + 4 \times \frac{14}{25} - 2 = \frac{-6 + 56 - 50}{25} = 0$.

Conclusion : cercle $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{81}{25}$, tangent à d en $H\left(-\frac{2}{25}; \frac{14}{25}\right)$.

S8.

1. Le vecteur $\begin{pmatrix} m+1 \\ m-2 \end{pmatrix}$ est non nul : $m+1=0$ et $m-2=0$ n'ont aucune solution commune. Donc d_m est une droite, de vecteur normal $\begin{pmatrix} m+1 \\ m-2 \end{pmatrix}$.
2. $(m+1) \times 1 + (m-2) \times 2 - 3m + 3 = m+1+2m-4-3m+3=0$ pour tout m .
3. d_m est parallèle à (Ox) si et seulement si son vecteur normal est vertical, c'est-à-dire $m+1=0$, soit $m=-1$. L'équation est alors $-3y+6=0$, soit $y=2$.

Conclusion : $m=-1$.

4. Δ a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $d_m \perp \Delta \iff$ leurs vecteurs normaux sont orthogonaux $\iff 2(m+1)-(m-2)=0 \iff m+4=0$, soit $m=-4$. L'équation devient $-3x-6y+15=0 \iff x+2y-5=0$ (elle passe bien par $P : 1+4-5=0$).

Conclusion : $m=-4$ et $d_{-4} : x+2y-5=0$.

5. $O \in d_m \iff -3m+3=0 \iff m=1$. Alors $d_1 : 2x-y=0$, qui contient bien $P(1; 2)$.
6. Si $\delta = d_m$, les vecteurs normaux $\begin{pmatrix} m+1 \\ m-2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ seraient colinéaires, donc $(m+1) \times 1 - (m-2) \times 1 = 0$. Or ce déterminant vaut $3 \neq 0$ pour tout m .

Conclusion : aucune droite d_m n'est égale à δ .

S9.

1. $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 5-x \\ 10-y \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MP} = 5x+10y-(x^2+y^2)$. Comme $M \in \mathcal{C}$, $x^2+y^2=25$ et la condition devient $5x+10y-25=0 \iff x+2y=5$.
2. $x=5-2y$ dans $x^2+y^2=25 : (5-2y)^2+y^2=25 \iff 5y^2-20y=0 \iff y=0$ ou $y=4$. Alors $x=5$ ou $x=-3$.

Conclusion : $T_1(5; 0)$ et $T_2(-3; 4)$.

3. En $T_1 : \overrightarrow{OT_1}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal, donc la tangente est $5(x-5)=0$, soit $x=5$ (elle contient P).
En $T_2 : \overrightarrow{OT_2}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal : $-3(x+3)+4(y-4)=0 \iff -3x+4y-25=0$. Pour $P : -15+40-25=0$.
4. $PT_1=10$ et $PT_2=\sqrt{(5+3)^2+(10-4)^2}=\sqrt{100}=10$.

Conclusion : $PT_1=PT_2$, les deux segments tangents issus de P ont même longueur.

S10.

1. Pour $y=ax^2+bx+c$ avec $a=1$, $b=-4$: l'axe est $x=-\frac{b}{2a}=2$ et $y(2)=4-8+1=-3$.

Conclusion : axe $x=2$, sommet $S(2; -3)$, parabole tournée vers le haut car $a=1>0$.

2. $x^2-4x+1=x-3 \iff x^2-5x+4=0 \iff (x-1)(x-4)=0$. Avec $y=x-3 : x=1$ donne $y=-2$ et $x=4$ donne $y=1$.

Conclusion : $A(1; -2)$ et $B(4; 1)$.

3. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x-1)(x-4) + (y+2)(y-1) = x^2-5x+4+y^2+y-2$.

Équation : $x^2+y^2-5x+y+2=0$, soit $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{1}{4} - 2 = \frac{9}{2}$.

Conclusion : centre $\Omega\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ (milieu de $[AB]$) et rayon $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Contrôle : $AB^2=9+9=18$

et $\frac{AB^2}{4} = \frac{9}{2}$.

4. $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = -2+4=2>0$.

D'après la question 3, pour tout point M , $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \Omega M^2 - \frac{9}{2}$. Donc $\Omega S^2 = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2} > \frac{9}{2}$.

Conclusion : $\Omega S > \text{rayon}$: S est à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$. (Contrôle direct : $\Omega S^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$.)

S11.

1. $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 1-x \\ -1-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 5-x \\ 3-y \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x-1)(x-5) + (y+1)(y-3) = x^2 - 6x + 5 + y^2 - 2y - 3$.
Ainsi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2$.
2. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 - 8$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \iff (x-3)^2 + (y-1)^2 = k+8$.
Si $k > -8$: cercle de centre $I(3; 1)$ (milieu de $[AB]$) et de rayon $\sqrt{k+8}$. Si $k = -8$: le seul point I . Si $k < -8$: ensemble vide.
Conclusion : pour $k = 2$, Γ est le cercle de centre $I(3; 1)$ et de rayon $\sqrt{10}$. (Pour $k = 0$, on retrouve le cercle de diamètre $[AB]$, de rayon $2\sqrt{2} = \frac{AB}{2}$.)
3. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4(x-1) + 4(y+1) = 4x + 4y$. Ainsi $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 \iff x + y - 2 = 0$.
Cette droite a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$: elle est perpendiculaire à (AB) . Elle coupe $(AB) : y = x - 2$ en $H(2; 0)$, et $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie bien $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$.
Conclusion : D est la droite $x + y - 2 = 0$, perpendiculaire à (AB) en $H(2; 0)$.
4. Avec $y = 2 - x$ dans $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10 : (x-3)^2 + (1-x)^2 = 10 \iff 2x^2 - 8x + 10 = 10 \iff 2x(x-4) = 0$. Donc $x = 0, y = 2$ ou $x = 4, y = -2$. Vérification : $9 + 1 = 10$ et $1 + 9 = 10$.
Conclusion : $D \cap \Gamma = \{(0; 2), (4; -2)\}$.