

Géométrie repérée**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans tous les exercices.

Exercice D1 : Trois démonstrations du cours

Partie A. Soit $A(x_A; y_A)$ et $\vec{n}(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})$ non nul. Soit d la droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Montrer que $M(x; y) \in d \iff ax + by + c = 0$, avec $c = -ax_A - by_A$.
2. Réciproquement, soit $(a; b) \neq (0; 0)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points vérifiant $ax + by + c = 0$. Montrer que $\mathcal{E}$ contient au moins un point A , puis que $\mathcal{E}$ est la droite passant par A de vecteur normal $(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})$.

Partie B. Soit A, B deux points distincts, I le milieu de $[AB]$.

3. Montrer que, pour tout point M , $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.
4. En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.
5. Application : $A(-2; 1)$ et $B(4; 5)$. Écrire une équation du cercle de diamètre $[AB]$ sous la forme $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$, puis donner son centre et son rayon.

Exercice D2 : La droite d'Euler (hors programme, pour aller plus loin)

Soit ABC un triangle non aplati, Ω le centre de son cercle circonscrit, de rayon R , et H son orthocentre. On choisit Ω comme origine du repère. Soit K le point tel que $\overrightarrow{\Omega K} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$ et que $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Montrer de même que $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
2. En déduire que $K = H$.
3. En déduire que H, G et Ω sont alignés, où G est le centre de gravité de ABC , et préciser la relation entre $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{\Omega G}$.
4. Application : $\Omega = O, A(5; 0), B(3; 4), C(-4; 3)$. Vérifier que Ω est bien le centre du cercle circonscrit, puis calculer H et G et vérifier la relation précédente.

Exercice D3 : Le cercle d'Apollonius

Soit $A(-3; 0), B(3; 0)$ et k un réel strictement positif. On note $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des points M tels que $MA = k MB$.

1. Pour $k = 1$, déterminer $\mathcal{E}_1$.
2. On suppose $k \neq 1$. Montrer que $M(x; y) \in \mathcal{E}_k$ si et seulement si

$$\left(x - \frac{3(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{6k}{k^2 - 1}\right)^2.$$

En déduire que $\mathcal{E}_k$ est un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

3. Pour $k = 3$, donner le centre et le rayon de $\mathcal{E}_3$, puis ses points d'intersection avec l'axe des abscisses. Vérifier pour l'un d'eux que $MA = 3MB$.
4. Montrer que, pour $k > 1$, le point B est strictement à l'intérieur du cercle $\mathcal{E}_k$.

Exercice D4 : Lieu des milieux

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 4, et $A(6; 0)$. Un point M parcourt $\mathcal{C}$ et on note I le milieu de $[AM]$.

1. Si $M(x; y)$ et $I(X; Y)$, exprimer X, Y en fonction de x, y , puis x, y en fonction de X, Y .
2. Montrer que, lorsque M décrit $\mathcal{C}$, I appartient au cercle Γ d'équation $(X - 3)^2 + Y^2 = 4$.
3. Réciproquement, montrer que tout point de Γ est le milieu de $[AM]$ pour un certain point M de $\mathcal{C}$. Conclure sur l'ensemble décrit par I .
4. Déterminer les points communs à Γ et $\mathcal{C}$.

Exercice D5 : Une parabole, la directrice et un cercle

Soit $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ et $A\left(0; -\frac{1}{4}\right)$.

1. Pour tout réel t , montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ au point $T(t; t^2)$ a pour équation $y = 2tx - t^2$.
2. Déterminer les tangentes à $\mathcal{P}$ passant par A . On note T_1 et T_2 leurs points de contact, d'abscisses respectivement positive et négative.
3. Montrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires.
4. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[T_1T_2]$ et montrer qu'il passe par A . Quel est son centre ?
5. Plus généralement, soit a un réel et $A_a\left(a; -\frac{1}{4}\right)$. Montrer qu'il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{P}$ passant par A_a et qu'elles sont perpendiculaires.

Exercice D6 : Cercles tangents aux axes

Soit $A(8; 0)$ et $B(0; 6)$. On rappelle qu'une droite est tangente à un cercle si et seulement si la distance du centre à la droite est égale au rayon, et (formule établie dans l'exercice S7 à partir du projeté orthogonal) que la distance du point $M_0(x_0; y_0)$ à la droite $ax + by + c = 0$ vaut $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

1. Déterminer une équation de (AB) .
2. Montrer qu'un cercle de centre $\Omega(r; r)$ avec $r > 0$ et de rayon r est tangent aux deux axes du repère.
3. Déterminer tous les réels $r > 0$ tels que ce cercle soit aussi tangent à (AB) .
4. Lequel de ces cercles est inscrit dans le triangle OAB ? Justifier, puis déterminer ses trois points de contact avec les côtés.
5. Retrouver le rayon du cercle inscrit avec la formule $r = \frac{\mathcal{A}}{p}$, où $\mathcal{A}$ est l'aire et p le demi-périmètre du triangle OAB .

Exercice D7 : Deux conditions sur les distances

Soit $A(-2; 0)$ et $B(4; 0)$. Pour un réel k , on cherche les points M tels que $MA^2 - MB^2 = k$ et $MA^2 + MB^2 = 30$.

1. Montrer que $MA^2 - MB^2 = 12x - 12$ et que l'ensemble $\mathcal{D}_k$ des points tels que $MA^2 - MB^2 = k$ est la droite d'équation $x = 1 + \frac{k}{12}$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points tels que $MA^2 + MB^2 = 30$ est le cercle de centre $I(1; 0)$ et de rayon $\sqrt{6}$.
3. Pour $k = 24$, déterminer les points de $\mathcal{D}_{24} \cap \mathcal{E}$ et calculer pour chacun MA et MB .
4. Discuter, selon la valeur de k , le nombre de points de $\mathcal{D}_k \cap \mathcal{E}$.

Exercice D8 : Points équidistants d'un axe et d'un point

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On pose $F(0; 1)$ et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ équidistants de l'axe des abscisses et du point F . On rappelle que la distance de $M(x; y)$ à l'axe des abscisses est $|y|$.

1. Montrer que $M(x; y) \in \mathcal{P}$ si et seulement si $y = \frac{x^2 + 1}{2}$. (On écrira $MF^2 = y^2$ et on justifiera que l'équivalence avec $MF = |y|$ est licite.)
2. Quelle est la nature de $\mathcal{P}$? Donner son sommet et son axe de symétrie.
3. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite d'équation $y = 5$, puis avec la droite d'équation $x = 2$. Vérifier dans chaque cas que les points trouvés sont bien équidistants de l'axe des abscisses et de F .
4. Déterminer l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ de centre F et de rayon $\frac{5}{2}$ avec la droite d'équation $y = \frac{5}{2}$. Que remarque-t-on par rapport à $\mathcal{P}$?
5. Pour tout réel h , déterminer le nombre de points communs à $\mathcal{P}$ et à la droite d'équation $y = h$.