

Corrigé : Géométrie repérée**Fiche Défi****D1. Partie A.**

1. $M \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$, soit $a(x-x_A) + b(y-y_A) = 0 \iff ax + by - ax_A - by_A = 0$. C'est bien $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A - by_A$.
2. Si $a \neq 0$, le point $A \left(-\frac{c}{a}; 0 \right)$ vérifie $ax + by + c = -c + 0 + c = 0$. Si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et $A \left(0; -\frac{c}{b} \right)$ convient. Dans les deux cas $A(x_A; y_A) \in \mathcal{E}$, donc $ax_A + by_A + c = 0$, c'est-à-dire $c = -ax_A - by_A$. D'après la question 1, $\mathcal{E}$ est alors la droite passant par A de vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Partie B.

3. Avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$ car I est le milieu de $[AB]$. Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.
4. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 = \frac{AB^2}{4} \iff MI = \frac{AB}{2}$: c'est le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.
5. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (-2-x)(4-x) + (1-y)(5-y) = (x+2)(x-4) + (y-1)(y-5) = x^2 - 2x - 8 + y^2 - 6y + 5$. Équation : $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$. Forme canonique : $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 3 + 1 + 9 = 13$.
Conclusion : centre $I(1; 3)$, rayon $\sqrt{13}$. (Contrôle : $AB^2 = 36 + 16 = 52$ et $\frac{AB^2}{4} = 13$.)

D2.

1. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. De plus $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, donc $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = OC^2 - OB^2 = R^2 - R^2 = 0$.
De même $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = OC^2 - OA^2 = 0$.
2. $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ signifie que K appartient à la perpendiculaire à (BC) passant par A , c'est-à-dire à la hauteur issue de A (si $K = A$, cela reste vrai). De même K est sur la hauteur issue de B . Ces deux hauteurs sont sécantes, car (BC) et (AC) ne sont pas parallèles, donc leur seul point commun est H .
Conclusion : $K = H$, soit $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
3. Le centre de gravité vérifie $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Donc $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
Conclusion : O, G, H sont alignés (droite d'Euler) et $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
4. $OA = 5, OB = \sqrt{9+16} = 5, OC = \sqrt{16+9} = 5$: O est équidistant des trois sommets. $H = A + B + C$ en coordonnées : $H(5+3-4; 0+4+3) = (4; 7)$, et $G \left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3} \right)$, donc $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.
Vérification : $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$: $7 - 7 = 0$. $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$: $-9 + 9 = 0$. $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$: $-16 + 16 = 0$.

D3.

1. $MA = MB$: c'est la médiatrice de $[AB]$, soit l'axe des ordonnées $x = 0$.
2. $MA = kMB \iff MA^2 = k^2 MB^2$ (distances positives) $\iff (x+3)^2 + y^2 = k^2 [(x-3)^2 + y^2]$
 $\iff (1-k^2)(x^2 + y^2) + 6(1+k^2)x + 9(1-k^2) = 0$.
Comme $k \neq 1$, on divise par $1-k^2$: $x^2 + y^2 - \frac{6(k^2+1)}{k^2-1}x + 9 = 0$. Avec $x_k = \frac{3(k^2+1)}{k^2-1}$:
 $(x-x_k)^2 + y^2 = x_k^2 - 9 = \frac{9[(k^2+1)^2 - (k^2-1)^2]}{(k^2-1)^2} = \frac{36k^2}{(k^2-1)^2}$.
Conclusion : $\mathcal{E}_k$ est le cercle de centre $\left(\frac{3(k^2+1)}{k^2-1}; 0 \right)$ et de rayon $\frac{6k}{|k^2-1|}$.
3. Pour $k = 3$: centre $\left(\frac{30}{8}; 0 \right) = \left(\frac{15}{4}; 0 \right)$ et rayon $\frac{18}{8} = \frac{9}{4}$. Sur l'axe : $x = \frac{15}{4} \pm \frac{9}{4}$, soit $x = 6$ ou $x = \frac{3}{2}$.

Pour $M(6; 0)$: $MA = 9$ et $MB = 3$, donc $MA = 3MB$. Pour $M\left(\frac{3}{2}; 0\right)$: $MA = \frac{9}{2}$ et $MB = \frac{3}{2}$.

4. Le centre est sur l'axe des abscisses, donc B est à l'intérieur si et seulement si $|3 - x_k| < \frac{6k}{k^2 - 1}$ (avec $k > 1$). Or $3 - x_k = \frac{3(k^2 - 1) - 3(k^2 + 1)}{k^2 - 1} = -\frac{6}{k^2 - 1}$, donc $|3 - x_k| = \frac{6}{k^2 - 1}$. Comme $k > 1$, $\frac{6}{k^2 - 1} < \frac{6k}{k^2 - 1}$.

Conclusion : B est strictement à l'intérieur de $\mathcal{E}_k$ pour $k > 1$.

D4.

1. $X = \frac{x+6}{2}$ et $Y = \frac{y}{2}$, donc $x = 2X - 6$ et $y = 2Y$.
2. $M \in \mathcal{C} \iff x^2 + y^2 = 16 \iff (2X - 6)^2 + (2Y)^2 = 16 \iff 4(X - 3)^2 + 4Y^2 = 16 \iff (X - 3)^2 + Y^2 = 4$.

Donc si $M \in \mathcal{C}$, alors $I \in \Gamma$.

3. Soit $N(X; Y) \in \Gamma$. Posons $M(2X - 6; 2Y)$.

Le milieu de $[AM]$ a pour coordonnées $\left(\frac{6 + 2X - 6}{2}; \frac{2Y}{2}\right) = (X; Y)$, c'est N . Et la chaîne d'équivalences de la question 2 montre que $M \in \mathcal{C}$.

Conclusion : l'ensemble des points I est exactement le cercle Γ de centre $(3; 0)$ et de rayon 2.

4. On résout $X^2 + Y^2 = 16$ et $(X - 3)^2 + Y^2 = 4$. En soustrayant : $X^2 - (X - 3)^2 = 12 \iff 6X - 9 = 12 \iff X = \frac{7}{2}$. Alors $Y^2 = 16 - \frac{49}{4} = \frac{15}{4}$.

Conclusion : les points communs sont $\left(\frac{7}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ et $\left(\frac{7}{2}; -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$. Vérification : $\left(\frac{7}{2} - 3\right)^2 + \frac{15}{4} =$

$$\frac{1}{4} + \frac{15}{4} = 4.$$

D5.

1. $f'(t) = 2t$, donc la tangente en $T(t; t^2)$ est $y = 2t(x - t) + t^2 = 2tx - t^2$.
2. A appartient à la tangente en T si et seulement si $-\frac{1}{4} = 2t \times 0 - t^2$, soit $t^2 = \frac{1}{4}$, donc $t = \pm\frac{1}{2}$.
Pour $t = \frac{1}{2}$: $T_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ et tangente $y = x - \frac{1}{4}$. Pour $t = -\frac{1}{2}$: $T_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ et tangente $y = -x - \frac{1}{4}$.
3. Les droites $x - y - \frac{1}{4} = 0$ et $x + y + \frac{1}{4} = 0$ ont pour vecteurs normaux $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dont le produit scalaire vaut $1 - 1 = 0$.

Conclusion : les tangentes sont perpendiculaires.

4. $\overrightarrow{MT_1} \cdot \overrightarrow{MT_2} = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(-\frac{1}{2} - x\right) + \left(\frac{1}{4} - y\right)^2 = x^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$.

Le cercle est donc $x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$: centre $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ (milieu de $[T_1T_2]$) et rayon $\frac{1}{2}$. Pour A :

$$0 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ donc } A \text{ est sur le cercle (cohérent avec l'angle droit en } A \text{ entre les tangentes).}$$

5. La tangente en $T(t; t^2)$ passe par A_a si et seulement si $-\frac{1}{4} = 2ta - t^2$, c'est-à-dire $t^2 - 2at - \frac{1}{4} = 0$. Son discriminant est $4a^2 + 1 > 0$: deux solutions distinctes t_1, t_2 , donc exactement deux tangentes, de coefficients directeurs $2t_1$ et $2t_2$. Le produit des racines vaut $-\frac{1}{4}$, donc $2t_1 \times 2t_2 = 4t_1t_2 = -1$. Des vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2t_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2t_2 \end{pmatrix}$ ont pour produit scalaire $1 + 4t_1t_2 = 0$.

Conclusion : par tout point de la droite $y = -\frac{1}{4}$ passent exactement deux tangentes à $\mathcal{P}$, perpendiculaires.

D6.

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ est directeur, donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal : $3x + 4y + c = 0$ avec $A : 24 + c = 0$. Vérification avec

$$B : 24 - 24 = 0.$$

Conclusion : $(AB) : 3x + 4y - 24 = 0$.

2. La distance de $\Omega(r; r)$ à l'axe (Ox) ($y = 0$) est $|r| = r$, et à l'axe (Oy) ($x = 0$) est $|r| = r$. Elle est égale au rayon : le cercle est tangent aux deux axes.

3. Distance de Ω à $(AB) : \frac{|3r + 4r - 24|}{5} = \frac{|7r - 24|}{5}$. Tangence : $|7r - 24| = 5r$, soit $7r - 24 = 5r$ ou $7r - 24 = -5r$, donc $r = 12$ ou $r = 2$.

Conclusion : $r = 2$ ou $r = 12$.

4. Pour $r = 2$, $\Omega(2; 2)$ vérifie $x > 0$, $y > 0$ et $3x + 4y = 14 < 24$: Ω est à l'intérieur du triangle. Pour $r = 12$, $3 \times 12 + 4 \times 12 = 84 > 24$: Ω est à l'extérieur. Le cercle inscrit est celui de rayon 2.

Contacts avec les axes : $(2; 0)$ et $(0; 2)$. Contact avec $(AB) : H = \Omega + t\vec{n}$, $\vec{n}(\frac{3}{4}) : 3(2 + 3t) + 4(2 + 4t) - 24 = 0 \iff 25t = 10 \iff t = \frac{2}{5}$, donc $H(\frac{16}{5}; \frac{18}{5})$. Vérification : $\Omega H = \frac{2}{5} \times 5 = 2$.

Conclusion : points de contact $(2; 0)$, $(0; 2)$ et $(\frac{16}{5}; \frac{18}{5})$, qui appartiennent bien aux côtés $[OA]$, $[OB]$ et $[AB]$.

5. $OA = 8$, $OB = 6$, $AB = \sqrt{64 + 36} = 10$. L'aire vaut $\frac{8 \times 6}{2} = 24$ et le demi-périmètre $p = \frac{8 + 6 + 10}{2} = 12$. Donc $r = \frac{24}{12} = 2$, ce qui est cohérent.

D7.

1. $MA^2 - MB^2 = (x + 2)^2 + y^2 - (x - 4)^2 - y^2 = (x + 2)^2 - (x - 4)^2 = (2x - 2) \times 6 = 12x - 12$. Donc $MA^2 - MB^2 = k \iff x = 1 + \frac{k}{12}$, droite verticale (perpendiculaire à (AB)), pour tout k .

2. $MA^2 + MB^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4x + 20 = 30 \iff x^2 - 2x + y^2 = 5 \iff (x - 1)^2 + y^2 = 6$.

3. Pour $k = 24 : x = 3$, puis $2^2 + y^2 = 6$, donc $y = \pm\sqrt{2}$. Points $M_{\pm}(3; \pm\sqrt{2})$.
 $MA^2 = 25 + 2 = 27$ et $MB^2 = 1 + 2 = 3$. Vérification : $27 - 3 = 24$ et $27 + 3 = 30$.

Conclusion : $MA = 3\sqrt{3}$ et $MB = \sqrt{3}$ (on a même $MA = 3MB$).

4. Les points de $\mathcal{D}_k \cap \mathcal{E}$ ont pour abscisse $1 + \frac{k}{12}$, donc $y^2 = 6 - \frac{k^2}{144}$.

Si $|k| < 12\sqrt{6}$: deux points. Si $|k| = 12\sqrt{6}$: un seul point (la droite est tangente au cercle). Si $|k| > 12\sqrt{6}$: aucun.

Conclusion : deux points si $|k| < 12\sqrt{6}$ ($\approx 29,4$), un si $|k| = 12\sqrt{6}$, aucun sinon.

D8.

1. Pour $M(x; y) : MF^2 = x^2 + (y - 1)^2$. Les nombres MF et $|y|$ sont positifs, donc $MF = |y| \iff MF^2 = y^2$. Alors $MF^2 = y^2 \iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 \iff 2y = x^2 + 1 \iff y = \frac{x^2 + 1}{2}$. Toutes les équivalences sont valables, donc $M \in \mathcal{P} \iff y = \frac{x^2 + 1}{2}$.

2. $\mathcal{P}$ est la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$: c'est une parabole, tournée vers le haut (coefficient de x^2 positif), de sommet $S(0; \frac{1}{2})$ et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées $x = 0$.

3. Avec $y = 5 : \frac{x^2 + 1}{2} = 5 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3$. Les points communs sont $(-3; 5)$ et $(3; 5)$.
Vérification : $MF^2 = 9 + (5 - 1)^2 = 25$, donc $MF = 5 = |y|$.

Avec $x = 2 : y = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$, un seul point $(2; \frac{5}{2})$. Vérification : $MF^2 = 4 + (\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$, donc $MF = \frac{5}{2} = |y|$.

4. $M(x; y) \in \mathcal{C} \iff x^2 + (y - 1)^2 = \frac{25}{4}$. Avec $y = \frac{5}{2} : x^2 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$. Les points d'intersection sont $(-2; \frac{5}{2})$ et $(2; \frac{5}{2})$. Ils appartiennent à $\mathcal{P}$: pour $x = \pm 2$, $\frac{x^2 + 1}{2} = \frac{5}{2}$.

C'est cohérent : un point de $\mathcal{P}$ situé à la distance $\frac{5}{2}$ de F est à la distance $\frac{5}{2}$ de l'axe, donc d'ordonnée $\frac{5}{2}$.

5. $M(x; h) \in \mathcal{P} \iff \frac{x^2 + 1}{2} = h \iff x^2 = 2h - 1.$

- Si $h < \frac{1}{2}$: $2h - 1 < 0$, aucune solution : aucun point commun.
- Si $h = \frac{1}{2}$: $x^2 = 0$, une solution : un point commun, le sommet S .
- Si $h > \frac{1}{2}$: $x = \pm\sqrt{2h - 1}$, deux points communs.

Conclusion : $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = \frac{x^2 + 1}{2}$, de sommet $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; elle coupe $y = 5$ en $(\pm 3; 5)$ et $x = 2$ en $\left(2; \frac{5}{2}\right)$; 0, 1 ou 2 points communs avec $y = h$ selon que $h < \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{2}$ ou $h > \frac{1}{2}$.