

Corrigé : Géométrie repérée**Fiche Bases****B1.**

1. Pour $ax + by + c = 0$, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal et $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur. Ici $a = 3$, $b = -4$.

Conclusion : $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal et $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur.

2. $A : 3 \times 0 - 4 \times 2 + 8 = 0$, donc $A \in d$. $B : 3 \times 4 - 4 \times 5 + 8 = 12 - 20 + 8 = 0$, donc $B \in d$. $C : 3 \times (-2) - 4 \times 1 + 8 = -2 \neq 0$, donc $C \notin d$.

3. Avec $x = 0 : -4y + 8 = 0$, donc $y = 2$. Avec $y = 0 : 3x + 8 = 0$, donc $x = -\frac{8}{3}$.

Conclusion : d coupe l'axe des ordonnées en $(0; 2)$ (c'est A) et l'axe des abscisses en $\left(-\frac{8}{3}; 0\right)$.

4. $3x - 4y + 8 = 0 \iff 4y = 3x + 8 \iff y = \frac{3}{4}x + 2$.

B2.

1. $M(x; y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix} : 4(x+2) + (y-3) = 0 \iff 4x + y + 5 = 0$.

Conclusion : $d : 4x + y + 5 = 0$.

2. $4 \times 1 + (-9) + 5 = 0$, donc $B \in d$.

3. Pour $4x + y + 5 = 0$, $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est directeur. Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} = -3\vec{u}$: les vecteurs sont colinéaires, ce qui est cohérent car A et B sont deux points de d .

B3.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vérifie $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 4 = 0$: il est normal à (AB) .

2. $(AB) : x - 2y + c = 0$. Comme $A \in (AB) : -1 - 4 + c = 0$, donc $c = 5$. Vérification avec $B : 3 - 8 + 5 = 0$.

Conclusion : $(AB) : x - 2y + 5 = 0$.

3. $C : 5 - 10 + 5 = 0$, donc $C \in (AB)$: A, B, C sont alignés. $D : 2 - 2 + 5 = 5 \neq 0$, donc $D \notin (AB)$: A, B, D ne sont pas alignés.

4. $x - 2y + 5 = 0 \iff y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

B4.

1. $\Delta \parallel d$: même vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\Delta : 2x - y + c = 0$. $P \in \Delta : 6 + 1 + c = 0$, donc $c = -7$.

Conclusion : $\Delta : 2x - y - 7 = 0$.

2. $\vec{n}'\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vérifie $2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$: il est orthogonal au vecteur normal de d , donc normal à Δ' . $\Delta' : x + 2y + c = 0$ et $P \in \Delta' : 3 - 2 + c = 0$, donc $c = -1$.

Conclusion : $\Delta' : x + 2y - 1 = 0$.

3. $y = 2x + 3$ (équation de d) dans $\Delta' : x + 2(2x + 3) - 1 = 0 \iff 5x + 5 = 0 \iff x = -1$, puis $y = 1$. Vérification : $-1 + 2 - 1 = 0$ et $-2 - 1 + 3 = 0$.

Conclusion : $H(-1; 1)$.

4. $PH = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. C'est la distance de P à d .

B5.

1. $I\left(\frac{-3+5}{2}; \frac{1+5}{2}\right) = (1; 3)$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. La médiatrice passe par I et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$, donc aussi $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : 2(x-1) + (y-3) = 0 \iff 2x + y - 5 = 0$.

Conclusion : la médiatrice de $[AB]$ est la droite $2x + y - 5 = 0$.

3. $2 \times 0 + 5 - 5 = 0$, donc M est sur la médiatrice. $MA^2 = (0+3)^2 + (5-1)^2 = 25$ et $MB^2 = (0-5)^2 + (5-5)^2 = 25$.

Conclusion : $MA = MB = 5$.

B6.

1. Vecteurs normaux $\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$: $6 \times (-3) - 2 \times (-9) = 0$, colinéaires. **Vrai.**
2. Un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Or $(-2) \times 3 - 3 \times 2 = -12 \neq 0$, donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à lui. **Faux.** (Autre argument : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 6 + 6 = 12 \neq 0$, alors qu'un vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal.)
3. Vecteurs normaux $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$: $4 \times 1 + (-1) \times 4 = 0$, orthogonaux. **Vrai.**
4. Contre-exemple : $x + y = 0$ et $x + y - 1 = 0$ ont le même vecteur normal mais sont distinctes (parallèles strictes). **Faux.**
5. $y = -2x + 5 \iff 2x + y - 5 = 0$, de vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **Vrai.**

B7.

1. Forme canonique : $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$. En développant : $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 16 = 0$.
Conclusion : $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.
2. $A : 0 + 16 = 16$, donc $A \in \mathcal{C}$. $B : (1+2)^2 + (7-3)^2 = 9 + 16 = 25 \neq 16$, donc $B \notin \mathcal{C}$. $C : (2+2)^2 + 0 = 16$, donc $C \in \mathcal{C}$.
3. Le rayon est $\Omega E : \Omega E^2 = (1+2)^2 + (-1-3)^2 = 9 + 16 = 25$.
Conclusion : $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ (rayon 5).
4. Avec $x = 0 : 4 + (y-3)^2 = 16 \iff (y-3)^2 = 12 \iff y = 3 \pm 2\sqrt{3}$.
Conclusion : les points sont $(0; 3 - 2\sqrt{3})$ et $(0; 3 + 2\sqrt{3})$.

B8.

1. $(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 12 = 0 \iff (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.
Conclusion : cercle de centre $(2; -3)$ et de rayon 5.
2. $(x+1)^2 - 1 + (y-4)^2 - 16 + 17 = 0 \iff (x+1)^2 + (y-4)^2 = 0$.
Conclusion : le second membre est nul, c'est le point $(-1; 4)$.
3. $(x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 14 = 0 \iff (x-3)^2 + (y+1)^2 = -4$.
Conclusion : une somme de carrés ne peut être négative : l'ensemble est vide.

B9.

1. $I \left(\frac{1+7}{2}; \frac{-2+6}{2} \right) = (4; 2)$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, donc $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$. Le rayon est 5.
Conclusion : $\mathcal{C} : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$.
2. $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 1-x \\ -2-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 7-x \\ 6-y \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x-1)(x-7) + (y+2)(y-6) = x^2 - 8x + 7 + y^2 - 4y - 12$.
Ainsi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$. Or $(x-4)^2 + (y-2)^2 - 25 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 - 25 = x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5$: les deux équations sont équivalentes.
3. $(4-4)^2 + (7-2)^2 = 25$, donc $C \in \mathcal{C}$.
Conclusion : C est sur le cercle de diamètre $[AB]$ et $C \neq A$, $C \neq B$, donc le triangle ACB est rectangle en C . (Vérification : $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, produit scalaire $-9 + 9 = 0$.)

B10.

1. $\Omega A^2 = (5-2)^2 + (3+1)^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, donc $A \in \mathcal{C}$.
2. $\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à T et T passe par $A : 3(x-5) + 4(y-3) = 0 \iff 3x + 4y - 27 = 0$.
Conclusion : $T : 3x + 4y - 27 = 0$.
3. `sur_cercle(5, 3) : (5-2)^2 + (3+1)^2 = 25`, donc `True`. `sur_cercle(0, 0) : 4 + 1 = 5 \neq 25`, donc `False`.
4. `def sur_tangente(x, y):`
 `return 3*x + 4*y - 27 == 0`
Pour $(9; 0) : 27 + 0 - 27 = 0$, la fonction renvoie `True`.