

Fiche 3 : problèmes de géométrie repérée

Sept problèmes pour **mettre en équation une figure** :

- orthocentre d'un triangle ;
- cercle circonscrit ;
- cercle et droites parallèles aux axes ;
- ensemble de points équidistants de l'axe des abscisses et d'un point ;
- un problème de modélisation (phare) ;
- vrai/faux ;
- un drone et une route (projeté orthogonal).

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- chaque **droite** est écrite avec son vecteur normal ;
- chaque **résultat** est vérifié avec la troisième droite ou un point ;
- la **conclusion** est une phrase qui nomme le point ou l'ensemble.

Le modèle de rédaction d'un problème

- **Traduire** : écris chaque donnée sous forme d'équation.
- **Résoudre** : calcule ligne par ligne.
- **Vérifier** avec une donnée non utilisée.
- **Conclure** par une phrase complète.

Les pièges classiques

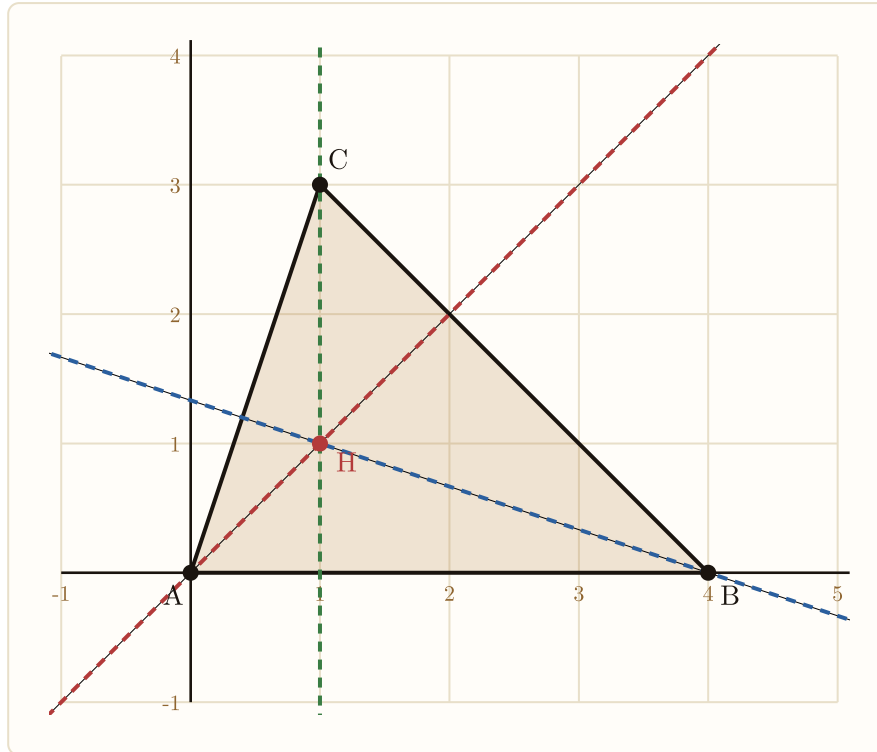
- Chercher l'intersection avec **une seule** droite : il en faut deux.
- Oublier de **vérifier** avec la troisième hauteur ou médiatrice.
- Élever au carré sans vérifier ensuite l'équivalence.
- Arrondir trop tôt.

Un problème de géométrie repérée sans figure, c'est un trajet en voiture sans GPS et sans carte : on avance, mais on croise des surprises.

Exercice 1 (★★) : l'orthocentre

Dans un repère orthonormé, $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ et $C(1; 3)$.

1. Déterminer l'équation de la hauteur issue de A .
2. Déterminer l'équation de la hauteur issue de B .
3. En déduire l'orthocentre H et le vérifier avec la hauteur issue de C .

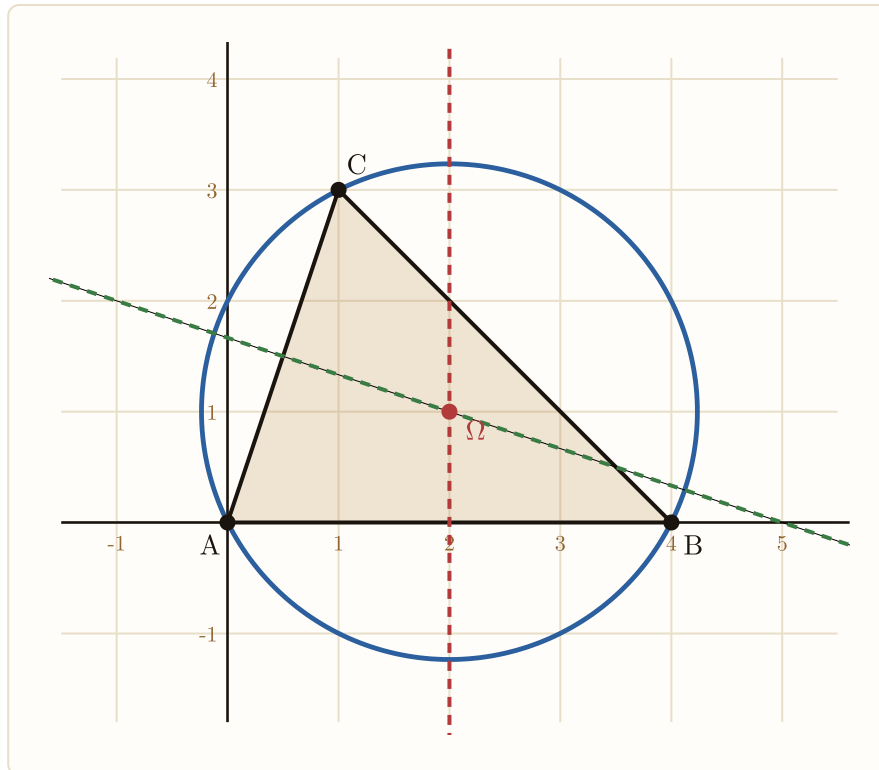


Les trois hauteurs se coupent en $H(1; 1)$

Exercice 2 (★★★) : le cercle circonscrit

Avec le même triangle $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(1; 3)$.

1. Déterminer la médiatrice de $[AB]$.
2. Déterminer la médiatrice de $[AC]$.
3. En déduire le centre Ω et une équation du cercle circonscrit à ABC .

Le cercle circonscrit a pour centre $\Omega(2 ; 1)$, intersection des médiatrices

Exercice 3 (★★) : position relative

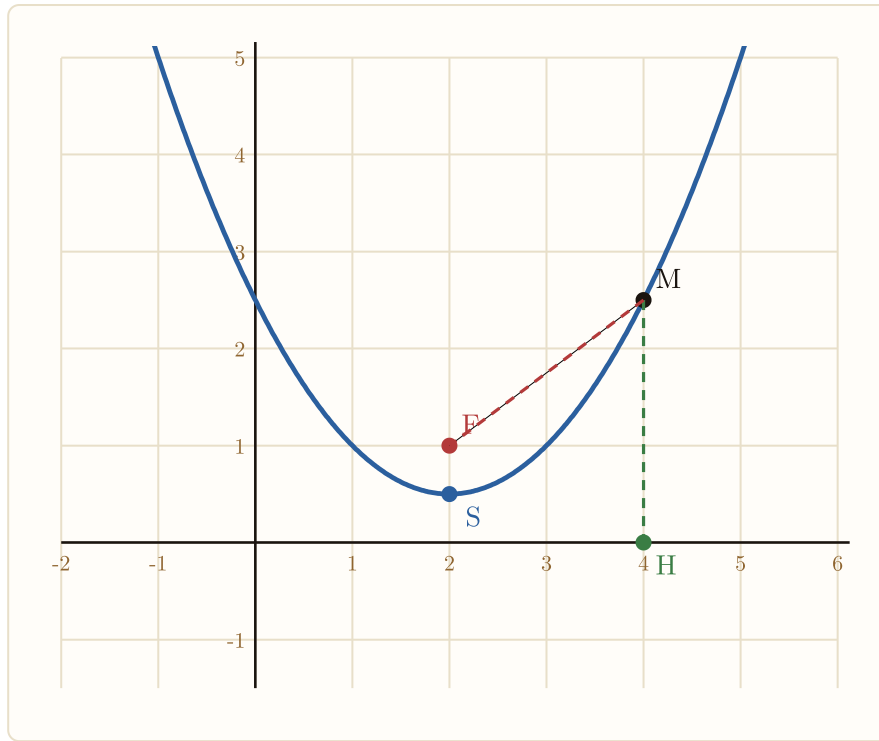
Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

1. Donner le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.
2. Étudier l'intersection de $\mathcal{C}$ avec les droites $x = 4$, $x = 5$ et $x = 6$.

Exercice 4 (★★★) : un ensemble de points

Dans un repère orthonormé, $F(2 ; 1)$. On cherche l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x ; y)$ équidistants de l'axe des abscisses et du point F .

1. Exprimer la distance de M à l'axe des abscisses, puis montrer que $M \in \mathcal{E} \iff y^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$.
2. En déduire que $\mathcal{E}$ est la courbe d'équation $y = \frac{(x - 2)^2 + 1}{2}$.
3. Vérifier avec le point $\left(4 ; \frac{5}{2}\right)$, puis déterminer le point de $\mathcal{E}$ d'ordonnée minimale.

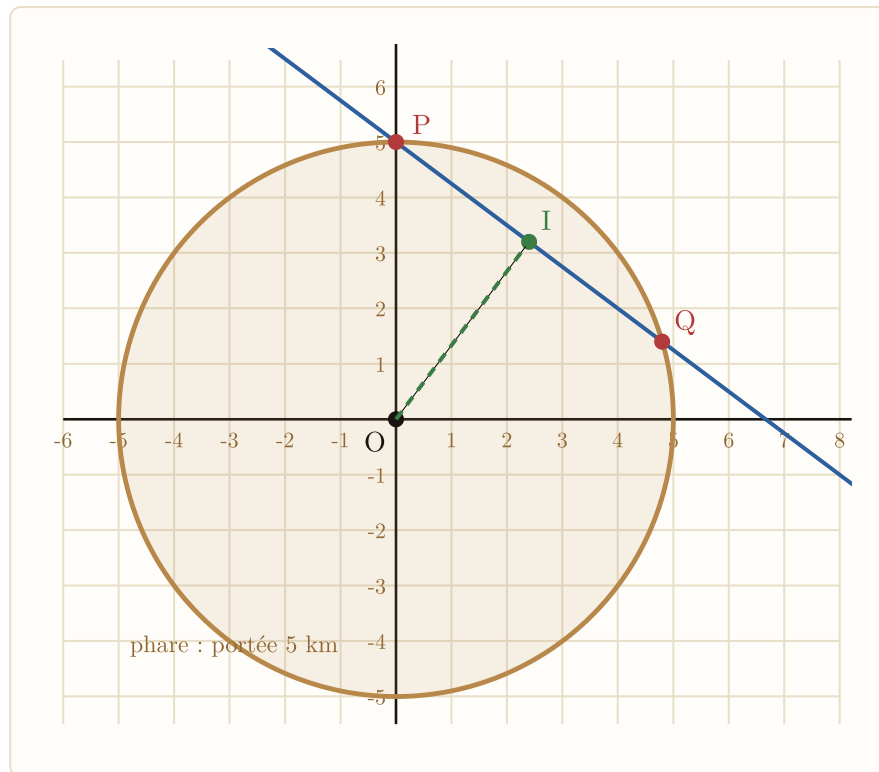


Les points M équidistants de l'axe des abscisses et de $F(2 ; 1)$: $MH = MF$

Exercice 5 (★★★) : le phare

Un phare est situé à l'origine O d'un repère orthonormé (unité : le kilomètre). Sa portée est de 5 km. Un bateau navigue en ligne droite sur la droite $d : 3x + 4y = 20$.

1. Écrire l'équation du cercle limitant la zone éclairée.
2. Déterminer le projeté orthogonal I de O sur d et la distance OI .
3. Le bateau est éclairé entre les points P et Q de d situés à 5 km du phare. Calculer PQ , puis la durée d'éclairage si le bateau avance à 12 km/h.
4. Déterminer les coordonnées de P et de Q .



Le bateau est éclairé entre P et Q, soit sur 6 km ; I est le point le plus proche du phare

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Les trois hauteurs d'un triangle sont toujours concourantes.
2. Le centre du cercle circonscrit est l'intersection des médianes.
3. L'ensemble des points M tels que $MA = MB$ est une droite.
4. Une droite et un cercle ont toujours au moins un point commun.
5. Si M est sur la droite d , son projeté orthogonal sur d est M lui-même.
6. L'ensemble des points équidistants de l'axe des abscisses et de $F(0; 3)$ est une droite.

Exercice 7 (★★) : un drone et une route

Dans un repère orthonormé (unité : 100 m), une route suit la droite $d : 3x + 4y - 10 = 0$. Un drone est au point $D(-1; 7)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de D sur d et la distance DH .
2. Le point $P(2; 1)$ est sur la route. Vérifier que $DP^2 = DH^2 + HP^2$.
3. En déduire que H est le point de la route le plus proche du drone.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Orthocentre, cercle circonscrit** (exercices 1 et 2).
- **Cercle et droites parallèles aux axes** (exercice 3).
- **Ensemble de points** équidistants de l'axe des abscisses et d'un point (exercice 4).
- **Problème de modélisation** avec un projeté orthogonal (exercices 5 et 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Les trois médiatrices d'un triangle se coupent :
 - A. à l'orthocentre
 - B. au centre du cercle circonscrit
 - C. au centre de gravité
 - D. en aucun point
2. Les trois hauteurs d'un triangle se coupent à :
 - A. l'orthocentre
 - B. le centre de gravité
 - C. le centre du cercle inscrit
 - D. le milieu d'un côté
3. Pour trouver les points communs d'un cercle et de la droite $y = 3$, on :
 - A. remplace y par 3 dans l'équation du cercle et on résout en x
 - B. mesure à la règle
 - C. calcule les angles
 - D. trace la médiatrice
4. L'ensemble des points équidistants de l'axe des abscisses et de $F(0; 2)$ est :
 - A. une droite
 - B. un cercle
 - C. une parabole
 - D. un segment
5. Pour tracer la hauteur issue de A dans ABC , on utilise comme vecteur normal :
 - A. $\overrightarrow{AB}$
 - B. $\overrightarrow{AC}$
 - C. $\overrightarrow{BC}$
 - D. $\overrightarrow{AI}$