

Fiche 3 : problèmes de géométrie repérée

Sept problèmes pour **mettre en équation une figure** :

- orthocentre d'un triangle ;
- cercle circonscrit ;
- cercle et droites parallèles aux axes ;
- ensemble de points équidistants de l'axe des abscisses et d'un point ;
- un problème de modélisation (phare) ;
- vrai/faux ;
- un drone et une route (projeté orthogonal).

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- chaque **droite** est écrite avec son vecteur normal ;
- chaque **résultat** est vérifié avec la troisième droite ou un point ;
- la **conclusion** est une phrase qui nomme le point ou l'ensemble.

Le modèle de rédaction d'un problème

- **Traduire** : écris chaque donnée sous forme d'équation.
- **Résoudre** : calcule ligne par ligne.
- **Vérifier** avec une donnée non utilisée.
- **Conclure** par une phrase complète.

Les pièges classiques

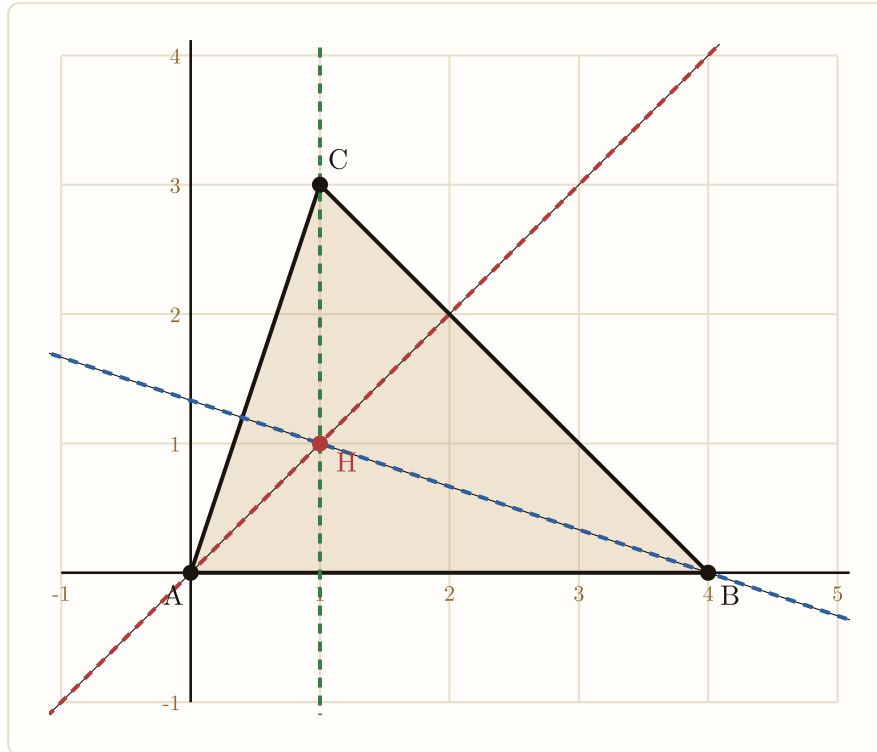
- Chercher l'intersection avec **une seule** droite : il en faut deux.
- Oublier de **vérifier** avec la troisième hauteur ou médiatrice.
- Élever au carré sans vérifier ensuite l'équivalence.
- Arrondir trop tôt.

Un problème de géométrie repérée sans figure, c'est un trajet en voiture sans GPS et sans carte : on avance, mais on croise des surprises.

Exercice 1 (★★) : l'orthocentre

Dans un repère orthonormé, $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ et $C(1; 3)$.

1. Déterminer l'équation de la hauteur issue de A .
2. Déterminer l'équation de la hauteur issue de B .
3. En déduire l'orthocentre H et le vérifier avec la hauteur issue de C .



Les trois hauteurs se coupent en $H(1; 1)$

Correction de l'exercice 1**Question 1**

La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC) : $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal.

$$-3(x - 0) + 3(y - 0) = 0 \iff y = x.$$

La hauteur issue de A est $y = x$.

Question 2

La hauteur issue de B est perpendiculaire à (AC) : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal.

$$1(x - 4) + 3(y - 0) = 0 \iff x + 3y - 4 = 0.$$

La hauteur issue de B est $x + 3y - 4 = 0$.

Question 3

On résout : $y = x$ et $x + 3y - 4 = 0$, donc $x = 1$ et $y = 1$.

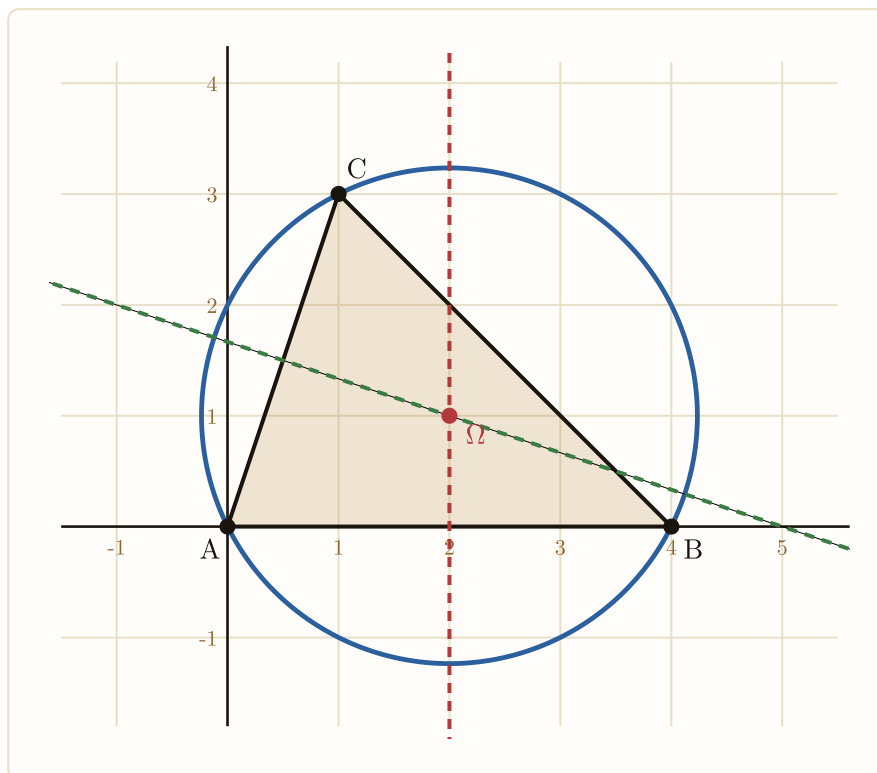
La hauteur issue de C est perpendiculaire à (AB) horizontale : c'est $x = 1$, qui contient $H(1; 1)$.

L'orthocentre est $H(1; 1)$.

Exercice 2 (★★★) : le cercle circonscrit

Avec le même triangle $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(1; 3)$.

1. Déterminer la médiatrice de $[AB]$.
2. Déterminer la médiatrice de $[AC]$.
3. En déduire le centre Ω et une équation du cercle circonscrit à ABC .



Le cercle circonscrit a pour centre $\Omega(2; 1)$, intersection des médiatrices

Correction de l'exercice 2

Question 1

Le milieu de $[AB]$ est $(2; 0)$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal : $4(x - 2) = 0$.

La médiatrice de $[AB]$ est $x = 2$.

Question 2

Le milieu de $[AC]$ est $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0 \iff x + 3y - 5 = 0.$$

La médiatrice de $[AC]$ est $x + 3y - 5 = 0$.

Question 3

Avec $x = 2$: $2 + 3y - 5 = 0 \iff y = 1$, donc $\Omega(2; 1)$.

$\Omega A^2 = 4 + 1 = 5$. Vérification : $\Omega B^2 = 4 + 1 = 5$ et $\Omega C^2 = 1 + 4 = 5$.

Le cercle circonscrit est $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

Exercice 3 (★★) : position relative

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

1. Donner le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.
2. Étudier l'intersection de $\mathcal{C}$ avec les droites $x = 4$, $x = 5$ et $x = 6$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 - 4 = 0 \iff (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

Centre $(2; -1)$ et rayon 3.

Question 2

Pour $x = 4$. $4 + (y + 1)^2 = 9 \iff (y + 1)^2 = 5 \iff y = -1 \pm \sqrt{5}$: deux points, droite sécante.

Pour $x = 5$. $9 + (y + 1)^2 = 9 \iff y = -1$: un point $(5; -1)$, droite tangente.

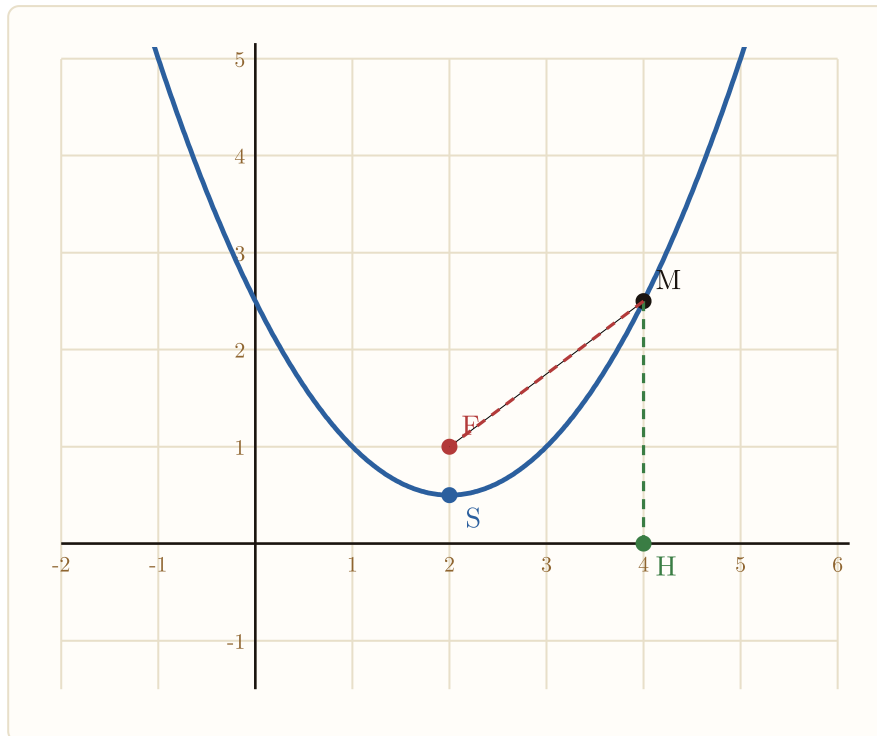
Pour $x = 6$. $16 + (y + 1)^2 = 9$: impossible, aucun point.

$x = 4$ coupe le cercle en deux points, $x = 5$ est tangente et $x = 6$ ne le rencontre pas.

Exercice 4 (★★★) : un ensemble de points

Dans un repère orthonormé, $F(2; 1)$. On cherche l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x; y)$ équidistants de l'axe des abscisses et du point F .

1. Exprimer la distance de M à l'axe des abscisses, puis montrer que $M \in \mathcal{E} \iff y^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$.
2. En déduire que $\mathcal{E}$ est la courbe d'équation $y = \frac{(x - 2)^2 + 1}{2}$.
3. Vérifier avec le point $\left(4; \frac{5}{2}\right)$, puis déterminer le point de $\mathcal{E}$ d'ordonnée minimale.



Les points M équidistants de l'axe des abscisses et de $F(2; 1)$: $MH = MF$

Correction de l'exercice 4**Question 1**

Le projeté orthogonal de $M(x; y)$ sur l'axe des abscisses est $H(x; 0)$, donc la distance de M à l'axe est $MH = |y|$.

$M \in \mathcal{E} \iff |y| = MF \iff y^2 = MF^2$ (deux nombres positifs ont des carrés dans le même ordre).

$$M \in \mathcal{E} \iff y^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2.$$

Question 2

On développe : $y^2 = (x - 2)^2 + y^2 - 2y + 1 \iff 2y = (x - 2)^2 + 1$.

$\mathcal{E}$ est la courbe d'équation $y = \frac{(x - 2)^2 + 1}{2}$: une parabole.

Question 3

Pour $x = 4$: $y = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$. De plus $MH = \frac{5}{2}$ et $MF^2 = (4-2)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$, donc $MF = \frac{5}{2}$.

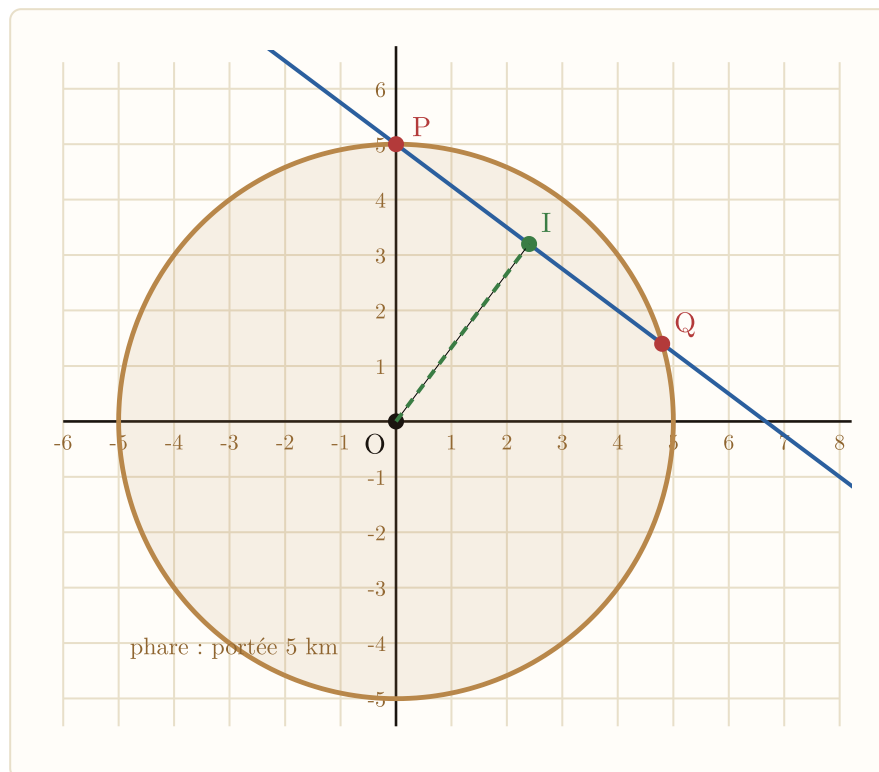
Comme $(x-2)^2 \geq 0$, on a $y \geq \frac{1}{2}$, avec égalité pour $x = 2$.

Le point $\left(4; \frac{5}{2}\right)$ est bien dans $\mathcal{E}$ et le point d'ordonnée minimale est $\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 5 (★★★) : le phare

Un phare est situé à l'origine O d'un repère orthonormé (unité : le kilomètre). Sa portée est de 5 km. Un bateau navigue en ligne droite sur la droite $d : 3x + 4y = 20$.

1. Écrire l'équation du cercle limitant la zone éclairée.
2. Déterminer le projeté orthogonal I de O sur d et la distance OI .
3. Le bateau est éclairé entre les points P et Q de d situés à 5 km du phare. Calculer PQ , puis la durée d'éclairage si le bateau avance à 12 km/h.
4. Déterminer les coordonnées de P et de Q .



Le bateau est éclairé entre P et Q , soit sur 6 km ; I est le point le plus proche du phare

Correction de l'exercice 5

Question 1

La zone éclairée est limitée par le cercle de centre O et de rayon 5.

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Question 2

Un vecteur normal à $d : 3x + 4y - 20 = 0$ est $\vec{n}(3; 4)$. On pose $I = O + t\vec{n} = (3t; 4t)$.

$$I \in d \iff 9t + 16t - 20 = 0 \iff t = \frac{4}{5}. \text{ Donc } I\left(\frac{12}{5}; \frac{16}{5}\right) = (2,4; 3,2) \text{ et } OI = \frac{4}{5}\|\vec{n}\| = \frac{4}{5} \times 5 = 4.$$

$$I(2,4; 3,2) \text{ et } OI = 4 \text{ km.}$$

Question 3

Soit P un point de d tel que $OP = 5$. Le triangle OIP est rectangle en I , donc $IP^2 = OP^2 - OI^2 = 25 - 16 = 9$ et $IP = 3$.

Les deux points de d à 5 km du phare sont de part et d'autre de I , à 3 km de I : $PQ = 6$. À 12 km/h, la durée est $\frac{6}{12} = 0,5$ h.

Le bateau est éclairé sur 6 km, pendant 30 minutes.

Question 4

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(-4; 3)$ et $\|\vec{u}\| = 5$. On avance de 3 km de part et d'autre de I : $\frac{3}{5}\vec{u} = \begin{pmatrix} -2,4 \\ 1,8 \end{pmatrix}$.

$$P = I + \frac{3}{5}\vec{u} = (2,4 - 2,4; 3,2 + 1,8) \text{ et } Q = I - \frac{3}{5}\vec{u} = (2,4 + 2,4; 3,2 - 1,8).$$

$$P(0; 5) \text{ et } Q(4,8; 1,4). \text{ Vérification : } 3 \times 4,8 + 4 \times 1,4 = 20 \text{ et } 4,8^2 + 1,4^2 = 25.$$

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Les trois hauteurs d'un triangle sont toujours concourantes.
2. Le centre du cercle circonscrit est l'intersection des médianes.
3. L'ensemble des points M tels que $MA = MB$ est une droite.
4. Une droite et un cercle ont toujours au moins un point commun.
5. Si M est sur la droite d , son projeté orthogonal sur d est M lui-même.
6. L'ensemble des points équidistants de l'axe des abscisses et de $F(0; 3)$ est une droite.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

C'est la concourance des hauteurs (approfondissement du programme sur le produit scalaire).

Vrai.

Affirmation 2

C'est l'intersection des médiatrices ; les médianes se coupent au centre de gravité.

Faux.

Affirmation 3

C'est la médiatrice de $[AB]$.

Vrai.

Affirmation 4

Non : la droite $x = 6$ ne rencontre pas le cercle de centre $(2; -1)$ et de rayon 3.**Faux.**

Affirmation 5

Le point M est sur d et $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$ est orthogonal à $d : H = M$.

Vrai.

Affirmation 6

 $|y| = MF \iff y^2 = x^2 + (y - 3)^2 \iff y = \frac{x^2 + 9}{6}$: c'est une parabole.**Faux.****Exercice 7 (★★) : un drone et une route**

Dans un repère orthonormé (unité : 100 m), une route suit la droite $d : 3x + 4y - 10 = 0$. Un drone est au point $D(-1; 7)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de D sur d et la distance DH .
2. Le point $P(2; 1)$ est sur la route. Vérifier que $DP^2 = DH^2 + HP^2$.
3. En déduire que H est le point de la route le plus proche du drone.

Correction de l'exercice 7

Question 1

Un vecteur normal à d est $\vec{n}(3; 4)$ et $H = D + t\vec{n} = (-1 + 3t; 7 + 4t)$.

$H \in d \iff 3(-1 + 3t) + 4(7 + 4t) - 10 = 0 \iff 25t + 15 = 0 \iff t = -\frac{3}{5}$. Donc

$H\left(-\frac{14}{5}; \frac{23}{5}\right)$ et $DH = \frac{3}{5} \times 5 = 3$.

$H\left(-\frac{14}{5}; \frac{23}{5}\right)$ et $DH = 3$, soit 300 m.

Question 2

$P \in d$ car $6 + 4 - 10 = 0$. $DP^2 = (2 + 1)^2 + (1 - 7)^2 = 9 + 36 = 45$.

$\overrightarrow{HP}\left(\frac{24}{5}; -\frac{18}{5}\right)$, donc $HP^2 = \frac{576 + 324}{25} = 36$. Et $DH^2 + HP^2 = 9 + 36 = 45$.

$DP^2 = DH^2 + HP^2 = 45$.

Question 3

Pour tout point P de la route, $\overrightarrow{DH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HP}$ (colinéaire à un vecteur directeur de d) : le triangle DHP est rectangle en H . Par Pythagore, $DP^2 = DH^2 + HP^2 \geq DH^2$.

On a $DP \geq DH$ pour tout $P \in d$: H est le point de la route le plus proche du drone.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Orthocentre, cercle circonscrit** (exercices 1 et 2).
- **Cercle et droites parallèles aux axes** (exercice 3).
- **Ensemble de points** équidistants de l'axe des abscisses et d'un point (exercice 4).
- **Problème de modélisation** avec un projeté orthogonal (exercices 5 et 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Les trois médiatrices d'un triangle se coupent :

- A. à l'orthocentre
- B. **au centre du cercle circonscrit (bonne réponse)**
- C. au centre de gravité
- D. en aucun point

Justification : Un point de la médiatrice est équidistant des deux extrémités.

2. Les trois hauteurs d'un triangle se coupent à :

- A. **l'orthocentre (bonne réponse)**
- B. le centre de gravité

- C. le centre du cercle inscrit
- D. le milieu d'un côté

Justification : Définition de l'orthocentre.

3. Pour trouver les points communs d'un cercle et de la droite $y = 3$, on :

- A. remplace y par 3 dans l'équation du cercle et on résout en x (bonne réponse)
- B. mesure à la règle
- C. calcule les angles
- D. trace la médiatrice

Justification : Pour une droite parallèle à un axe, on obtient une équation à une seule inconnue.

4. L'ensemble des points équidistants de l'axe des abscisses et de $F(0; 2)$ est :

- A. une droite
- B. un cercle
- C. une parabole (bonne réponse)
- D. un segment

Justification : $|y| = MF \iff y^2 = x^2 + (y - 2)^2 \iff y = \frac{x^2}{4} + 1$: c'est une parabole.

5. Pour tracer la hauteur issue de A dans ABC , on utilise comme vecteur normal :

- A. $\overrightarrow{AB}$
- B. $\overrightarrow{AC}$
- C. $\overrightarrow{BC}$ (bonne réponse)
- D. $\overrightarrow{AI}$

Justification : La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC) .