

Fiche 2 : cercles

Neuf exercices pour maîtriser **les cercles** :

- écrire l'équation d'un cercle ;
- reconnaître un cercle avec la forme canonique ;
- cercle de diamètre $[AB]$;
- tangente à un cercle ;
- intersection avec une droite parallèle à un axe ;
- vrai/faux ;
- de Thalès à Descartes ;
- un script Python ;
- tangente et projeté orthogonal.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le **centre** et le **rayon** sont identifiés explicitement ;
- la **forme canonique** est écrite ligne par ligne ;
- les points d'intersection sont **vérifiés**.

Le modèle de rédaction pour reconnaître un cercle

« $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0 \iff (x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0 \iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$. C'est le cercle de centre $(3; -2)$ et de rayon 4. »

- **Regroupe** les termes en x et en y .
- **Complète les carrés** et passe les constantes à droite.
- **Lis** le centre et le rayon, après avoir vérifié le signe du second membre.

Les pièges classiques

- Oublier de compenser quand on complète un carré.
- Donner r^2 au lieu de r .
- Se tromper de signe sur les coordonnées du centre.
- Oublier de vérifier que le second membre est strictement positif.

Compléter le carré sans compenser, c'est comme se couper une part de gâteau et dire que le gâteau n'a pas changé.

Exercice 1 (★) : équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3.

1. Écrire une équation de $\mathcal{C}$ sous forme canonique puis développée.
2. $A(5; -1)$ et $B(0; 1)$ sont-ils sur $\mathcal{C}$?
3. Calculer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 2 (★★) : reconnaître un cercle

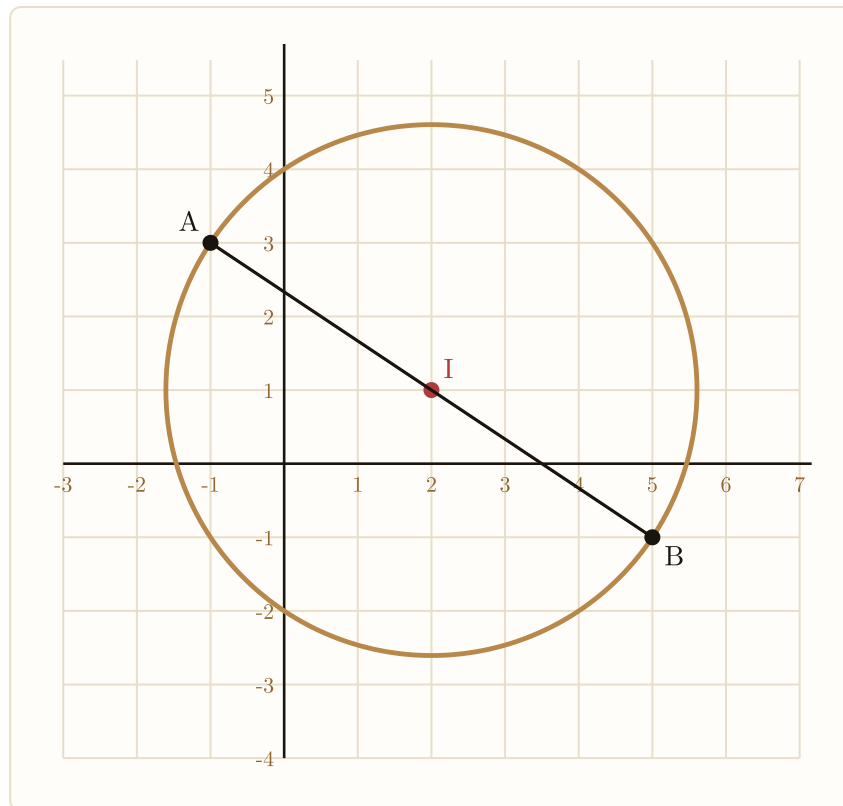
Dans un repère orthonormé, déterminer la nature de l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant :

1. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$;
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;
3. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 10 = 0$.

Exercice 3 (★★) : cercle de diamètre $[AB]$

Dans un repère orthonormé, $A(-1; 3)$ et $B(5; -1)$.

1. Calculer le milieu I de $[AB]$ et la longueur AB .
2. Donner l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec le centre et le rayon.
3. Retrouver cette équation avec $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.



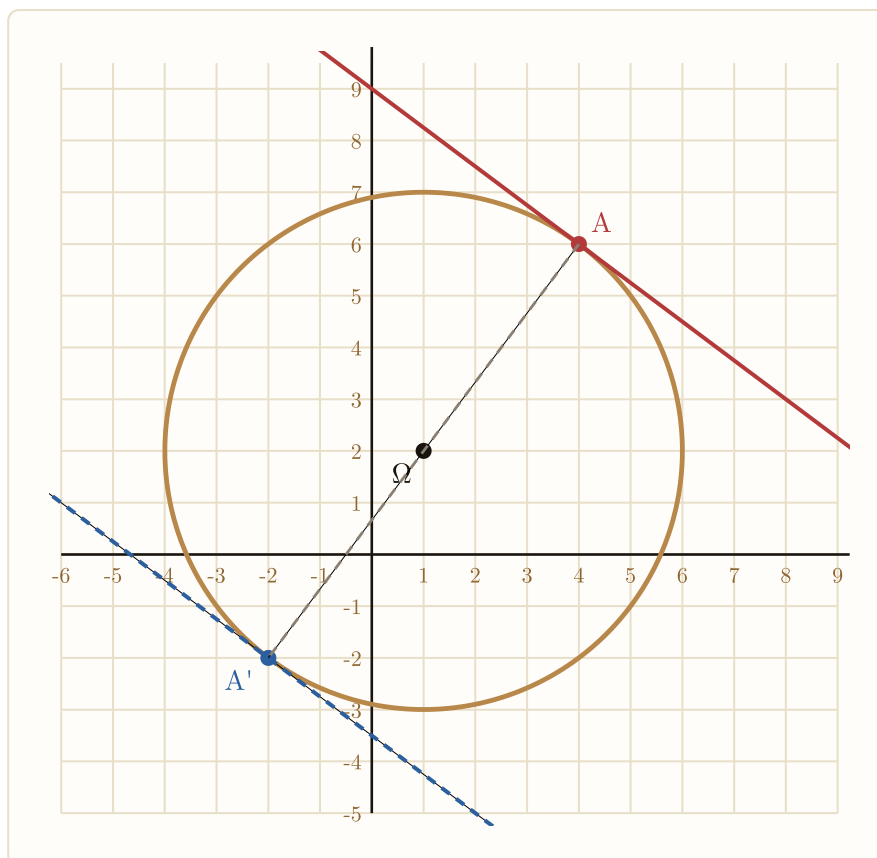
Le cercle de diamètre $[AB]$: centre $I(2 ; 1)$ et rayon $\sqrt{13}$

Exercice 4 (★★) : tangente à un cercle

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1 ; 2)$ et de rayon 5. Le point $A(4 ; 6)$ est sur $\mathcal{C}$.

1. Vérifier que $A \in \mathcal{C}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A .
3. Déterminer l'équation de la tangente en $A'(-2 ; -2)$, symétrique de A par rapport à Ω .

Rappel : la tangente à un cercle en un de ses points A est la droite passant par A et perpendiculaire à (ΩA) .



Tangentes en A et en A' (extrémités d'un diamètre) : elles sont parallèles

Exercice 5 (★★) : droite et cercle

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 25$.

1. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $d : y = 3$.
2. Montrer que la droite $x = 5$ ne rencontre $\mathcal{C}$ qu'en un point A, puis que c'est la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Que dire de la droite $x = 6$?
3. Vérifier avec un script Python :

```
for (x, y) in ((4, 3), (-4, 3), (5, 0)):
    print(x, y, x**2 + y**2)
```

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. $x^2 + y^2 = -1$ est l'équation d'un cercle.
2. Le point $(3; 4)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 5.
3. La tangente en A est parallèle à (ΩA) .
4. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ est l'équation d'un cercle.
5. La droite $y = 6$ coupe le cercle $x^2 + y^2 = 25$.

Exercice 7 (★★) : de Thalès à Descartes

Dans un repère orthonormé, $A(-r; 0)$ et $B(r; 0)$ avec $r > 0$. Le programme attribue à Thalès la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ par le triangle rectangle, et à Descartes, au XVII^e siècle, l'équation d'un cercle en repère orthonormé.

1. Pour $M(x; y)$, calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff x^2 + y^2 = r^2$.
3. Un point M distinct de A et B est tel que AMB est rectangle en M . Que peut-on dire de M ?
Application : $r = 5$ et $M(3; 4)$.

Exercice 8 (★★) : un script pour reconnaître un cercle

On considère le script Python suivant :

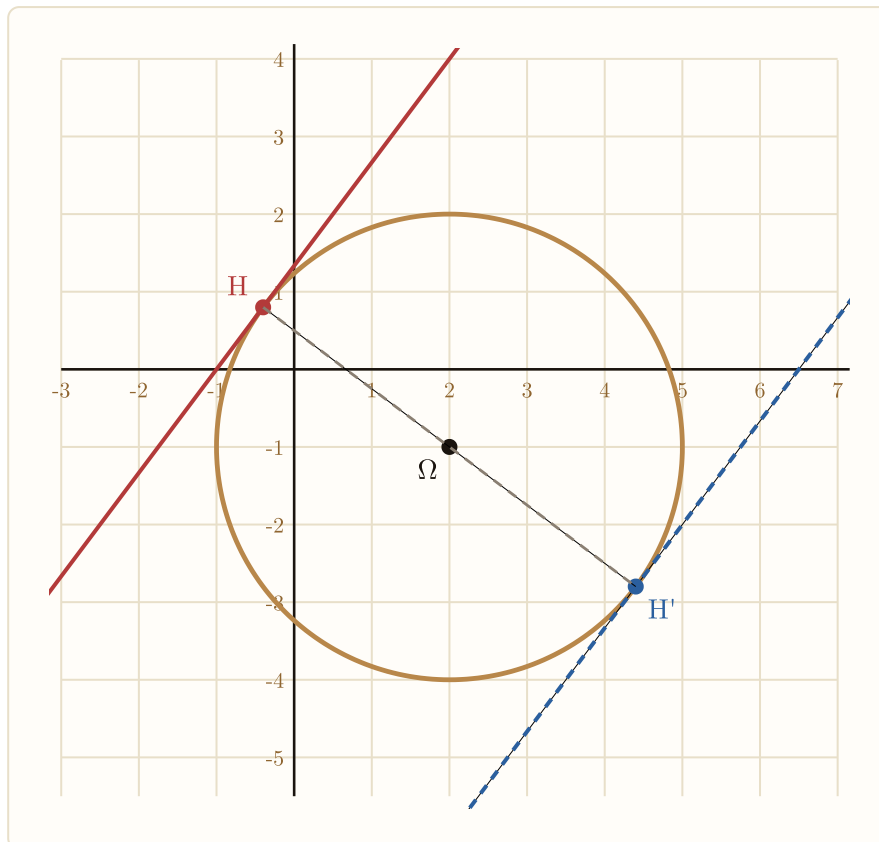
```
def cercle(p, q, s):
    # étudie  $x^2 + y^2 + p x + q y + s = 0$ 
    k = (p**2 + q**2) / 4 - s
    if k > 0:
        return "cercle", (-p / 2, -q / 2), k ** 0.5
    if k == 0:
        return "point", (-p / 2, -q / 2)
    return "ensemble vide"
```

1. Pourquoi la variable k représente-t-elle le second membre de la forme canonique de $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$?
2. Prévoir l'affichage de `print(cercle(-4, 6, 13))`, de `print(cercle(2, -4, 1))` et de `print(cercle(2, 4, 10))`.

Exercice 9 (★★★) : tangente et projeté orthogonal

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3, et $d : 4x - 3y + 4 = 0$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de Ω sur d .
2. Calculer ΩH , vérifier que $H \in \mathcal{C}$, puis conclure que d est la tangente à $\mathcal{C}$ en H .
3. Déterminer l'équation de l'autre tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à d .



Le cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3, et ses deux tangentes de vecteur normal $(4; -3)$

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Écrire** l'équation d'un cercle (exercices 1 et 3).
- **Reconnaître** un cercle avec la forme canonique (exercices 2 et 8).
- **Déterminer une tangente** (exercices 4 et 9).
- **Intersection** d'un cercle et d'une droite parallèle à un axe (exercice 5).
- **Cercle de diamètre** $[AB]$ et triangle rectangle (exercices 3 et 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Le cercle de centre $(1; -2)$ et de rayon 3 a pour équation :

- A. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
B. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
C. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3$
D. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$
2. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ est le cercle de centre :
A. $(3; -1)$
B. $(-3; 1)$
C. $(3; 1)$
D. $(-3; -1)$
3. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :
A. $MA = MB$
B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
C. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$
D. $MA + MB = AB$
4. La tangente en A à un cercle de centre Ω est :
A. parallèle à (ΩA)
B. perpendiculaire à (ΩA)
C. la droite (ΩA)
D. confondue avec le rayon
5. Pour $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$, l'ensemble est :
A. un cercle de rayon **13**
B. un point
C. un cercle de rayon **2**
D. l'ensemble vide
6. Les points communs du cercle $x^2 + y^2 = 25$ et de la droite $y = 3$ sont :
A. $(-4; 3)$ et $(4; 3)$
B. $(3; 4)$ et $(3; -4)$
C. $(3; 0)$ seulement
D. aucun point