

Fiche 2 : cercles

Neuf exercices pour maîtriser **les cercles** :

- écrire l'équation d'un cercle ;
- reconnaître un cercle avec la forme canonique ;
- cercle de diamètre $[AB]$;
- tangente à un cercle ;
- intersection avec une droite parallèle à un axe ;
- vrai/faux ;
- de Thalès à Descartes ;
- un script Python ;
- tangente et projeté orthogonal.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le **centre** et le **rayon** sont identifiés explicitement ;
- la **forme canonique** est écrite ligne par ligne ;
- les points d'intersection sont **vérifiés**.

Le modèle de rédaction pour reconnaître un cercle

« $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0 \iff (x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0 \iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$. C'est le cercle de centre $(3; -2)$ et de rayon 4. »

- **Regroupe** les termes en x et en y .
- **Complète les carrés** et passe les constantes à droite.
- **Lis** le centre et le rayon, après avoir vérifié le signe du second membre.

Les pièges classiques

- Oublier de compenser quand on complète un carré.
- Donner r^2 au lieu de r .
- Se tromper de signe sur les coordonnées du centre.
- Oublier de vérifier que le second membre est strictement positif.

Compléter le carré sans compenser, c'est comme se couper une part de gâteau et dire que le gâteau n'a pas changé.

Exercice 1 (★) : équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3.

1. Écrire une équation de $\mathcal{C}$ sous forme canonique puis développée.
2. $A(5; -1)$ et $B(0; 1)$ sont-ils sur $\mathcal{C}$?
3. Calculer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

On développe : $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 9 = 0$.

$$\mathcal{C} : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9, \text{ soit } x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0.$$

Question 2

$$A : (5 - 2)^2 + (-1 + 1)^2 = 9 + 0 = 9. \text{ Donc } A \in \mathcal{C}.$$

$$B : (0 - 2)^2 + (1 + 1)^2 = 4 + 4 = 8 \neq 9. \text{ Donc } B \notin \mathcal{C}.$$

$$A \in \mathcal{C} \text{ et } B \notin \mathcal{C}.$$

Question 3

$$\text{Sur l'axe des abscisses, } y = 0 : (x - 2)^2 + 1 = 9 \iff (x - 2)^2 = 8 \iff x - 2 = \pm 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Les points sont } (2 - 2\sqrt{2}; 0) \text{ et } (2 + 2\sqrt{2}; 0).$$

Exercice 2 (★★) : reconnaître un cercle

Dans un repère orthonormé, déterminer la nature de l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant :

1. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$;
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;
3. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 10 = 0$.

Correction de l'exercice 2

Équation 1

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0 \iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

C'est le cercle de centre $(3; -2)$ et de rayon 4.

Équation 2

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 5 = 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0.$$

Le second membre est nul : c'est le point $(1; -2)$.

Équation 3

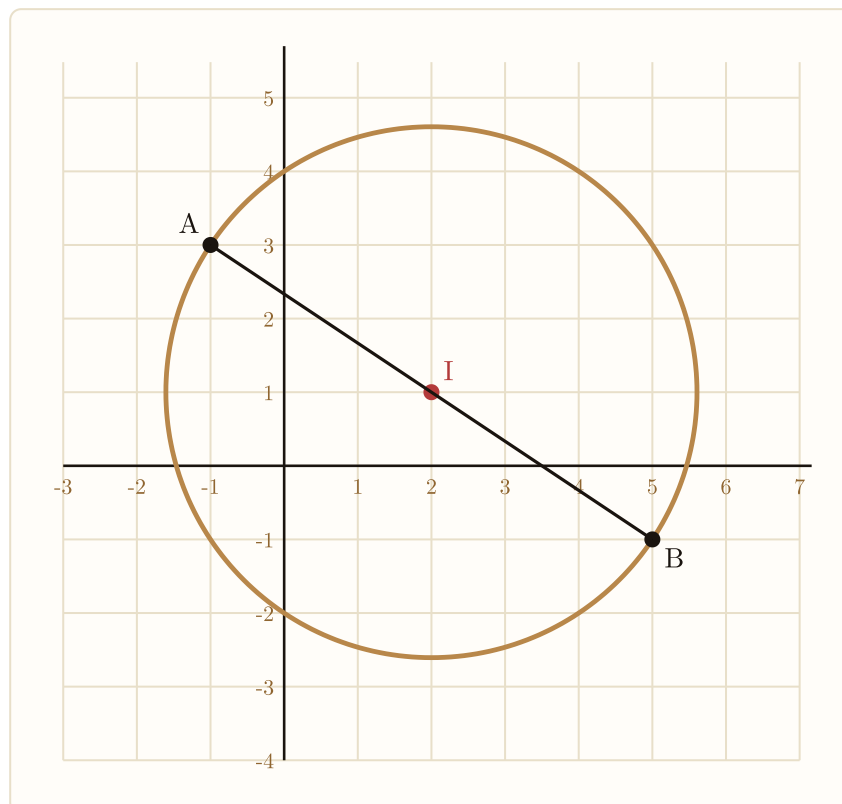
$$(x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 10 = 0 \iff (x+1)^2 + (y+2)^2 = -5.$$

Un carré est positif : l'ensemble est **vide**.

Exercice 3 (★★) : cercle de diamètre $[AB]$

Dans un repère orthonormé, $A(-1; 3)$ et $B(5; -1)$.

1. Calculer le milieu I de $[AB]$ et la longueur AB .
2. Donner l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec le centre et le rayon.
3. Retrouver cette équation avec $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.



Le cercle de diamètre $[AB]$: centre $I(2; 1)$ et rayon $\sqrt{13}$

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$I\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{3-1}{2}\right) = (2; 1).$$

$$AB^2 = (5+1)^2 + (-1-3)^2 = 36 + 16 = 52.$$

$$I(2; 1) \text{ et } AB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Question 2

Le rayon est $\frac{AB}{2} = \sqrt{13}$, donc $r^2 = 13$.

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13.$$

Question 3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (-1-x)(5-x) + (3-y)(-1-y) = (x+1)(x-5) + (y-3)(y+1) \\ &= x^2 - 4x - 5 + y^2 - 2y - 3 = x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8.\end{aligned}$$

$$\text{Et } (x-2)^2 + (y-1)^2 - 13 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 13 = x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8.$$

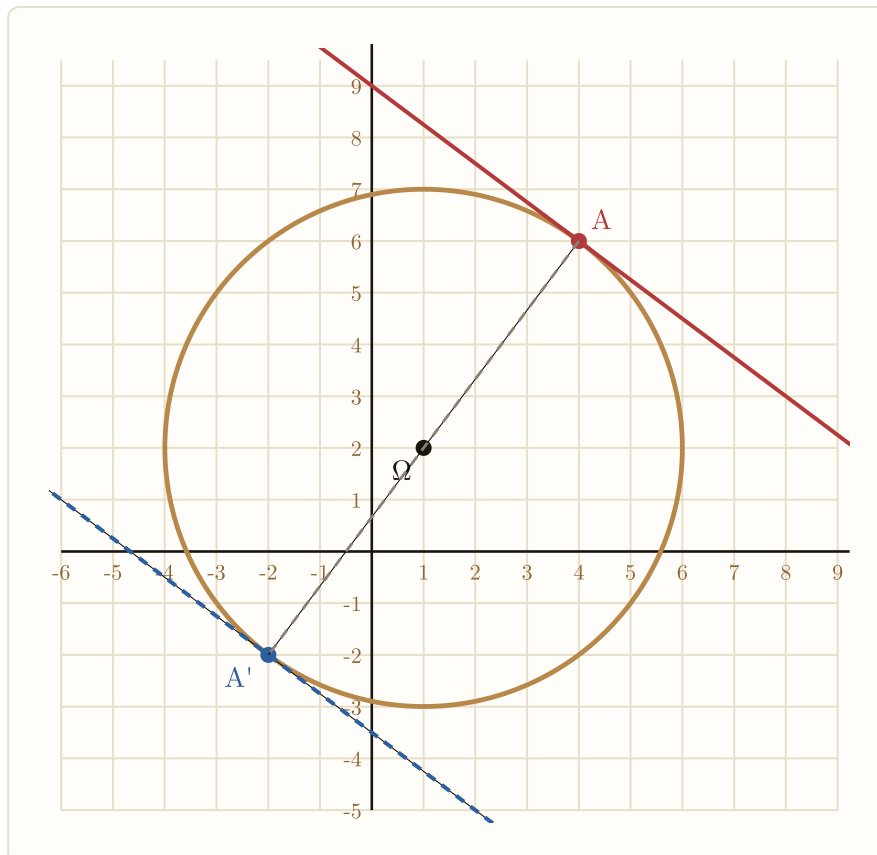
Les deux équations sont équivalentes : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$.

Exercice 4 (★★) : tangente à un cercle

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1; 2)$ et de rayon 5. Le point $A(4; 6)$ est sur $\mathcal{C}$.

1. Vérifier que $A \in \mathcal{C}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A .
3. Déterminer l'équation de la tangente en $A'(-2; -2)$, symétrique de A par rapport à Ω .

Rappel : la tangente à un cercle en un de ses points A est la droite passant par A et perpendiculaire à (ΩA) .



Tangentes en A et en A' (extrémités d'un diamètre) : elles sont parallèles

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$\Omega A^2 = (4 - 1)^2 + (6 - 2)^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

$$A \in \mathcal{C}.$$

Question 2

$$\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ est normal à la tangente. } M \in T \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0.$$

$$3(x - 4) + 4(y - 6) = 0 \iff 3x + 4y - 36 = 0.$$

$$T : 3x + 4y - 36 = 0.$$

Question 3

$$\overrightarrow{\Omega A'} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} : -3(x + 2) - 4(y + 2) = 0 \iff 3x + 4y + 14 = 0.$$

La tangente en A' est $3x + 4y + 14 = 0$: elle est **parallèle** à T (tangentes aux extrémités d'un diamètre).

Exercice 5 (★★) : droite et cercle

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 25$.

1. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $d : y = 3$.
2. Montrer que la droite $x = 5$ ne rencontre $\mathcal{C}$ qu'en un point A , puis que c'est la tangente à $\mathcal{C}$ en A . Que dire de la droite $x = 6$?
3. Vérifier avec un script Python :

```
for (x, y) in ((4, 3), (-4, 3), (5, 0)):
    print(x, y, x**2 + y**2)
```

Correction de l'exercice 5**Question 1**

On remplace y par 3 : $x^2 + 9 = 25 \iff x^2 = 16 \iff x = -4$ ou $x = 4$.

Les points sont $(-4; 3)$ et $(4; 3)$.

Question 2

Avec $x = 5$: $25 + y^2 = 25 \iff y^2 = 0 \iff y = 0$. Un seul point commun : $A(5; 0)$.

Le rayon $[OA]$ est porté par l'axe des abscisses et la droite $x = 5$ est verticale : elles sont perpendiculaires. Or la tangente en A est la perpendiculaire à (OA) passant par A .

Avec $x = 6$: $36 + y^2 = 25 \iff y^2 = -11$, impossible.

La droite $x = 5$ est la tangente en $A(5; 0)$ et la droite $x = 6$ ne rencontre pas le cercle.

Question 3

Le script affiche 4 3 25, puis -4 3 25, puis 5 0 25.

Les trois points vérifient bien $x^2 + y^2 = 25$.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. $x^2 + y^2 = -1$ est l'équation d'un cercle.
2. Le point $(3; 4)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 5.
3. La tangente en A est parallèle à (ΩA) .
4. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ est l'équation d'un cercle.
5. La droite $y = 6$ coupe le cercle $x^2 + y^2 = 25$.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

Un carré est positif ou nul : aucune solution.

Faux.

Affirmation 2

$$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2.$$

Vrai.

Affirmation 3

La tangente est perpendiculaire à (ΩA) .

Faux.

Affirmation 4

Elle s'écrit $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$: c'est le point $(1; -2)$, pas un cercle.

Faux.

Affirmation 5

Avec $y = 6$: $x^2 + 36 = 25 \iff x^2 = -11$, impossible.

Faux.

Exercice 7 (★★) : de Thalès à Descartes

Dans un repère orthonormé, $A(-r; 0)$ et $B(r; 0)$ avec $r > 0$. Le programme attribue à Thalès la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ par le triangle rectangle, et à Descartes, au XVII^e siècle, l'équation d'un cercle en repère orthonormé.

1. Pour $M(x; y)$, calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff x^2 + y^2 = r^2$.
3. Un point M distinct de A et B est tel que AMB est rectangle en M . Que peut-on dire de M ?
Application : $r = 5$ et $M(3; 4)$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

$$\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -r - x \\ -y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} r - x \\ -y \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (-r - x)(r - x) + y^2 = -(r + x)(r - x) + y^2 = -(r^2 - x^2) + y^2.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 + y^2 - r^2.$$

Question 2

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff x^2 + y^2 = r^2.$$

Question 3

AMB rectangle en M signifie $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, donc $x^2 + y^2 = r^2$: M est sur le cercle de centre O et de rayon r , c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

Réciproquement, tout point de ce cercle distinct de A et B donne un triangle rectangle en M .
Pour $r = 5$ et $M(3; 4)$: $3^2 + 4^2 = 25$, et $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ donnent $-16 + 16 = 0$.

Le triangle AMB est rectangle en M si et seulement si M est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 8 (★★) : un script pour reconnaître un cercle

On considère le script Python suivant :

```
def cercle(p, q, s):
    # étudie  $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ 
    k = (p**2 + q**2) / 4 - s
    if k > 0:
        return "cercle", (-p / 2, -q / 2), k ** 0.5
    if k == 0:
        return "point", (-p / 2, -q / 2)
    return "ensemble vide"
```

1. Pourquoi la variable k représente-t-elle le second membre de la forme canonique de $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$?
2. Prévoir l'affichage de `print(cercle(-4, 6, 13))`, de `print(cercle(2, -4, 1))` et de `print(cercle(2, 4, 10))`.

Correction de l'exercice 8

Question 1

On a $x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}$ et de même pour y . L'équation devient $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + q^2}{4} - s$.

Le second membre est k , et le centre est $\left(-\frac{p}{2}; -\frac{q}{2}\right)$.

Question 2

Pour $(-4, 6, 13)$: $k = \frac{16 + 36}{4} - 13 = 0$. C'est le point $(2; -3)$.

Pour $(2, -4, 1)$: $k = \frac{4 + 16}{4} - 1 = 4$. C'est le cercle de centre $(-1; 2)$ et de rayon 2.

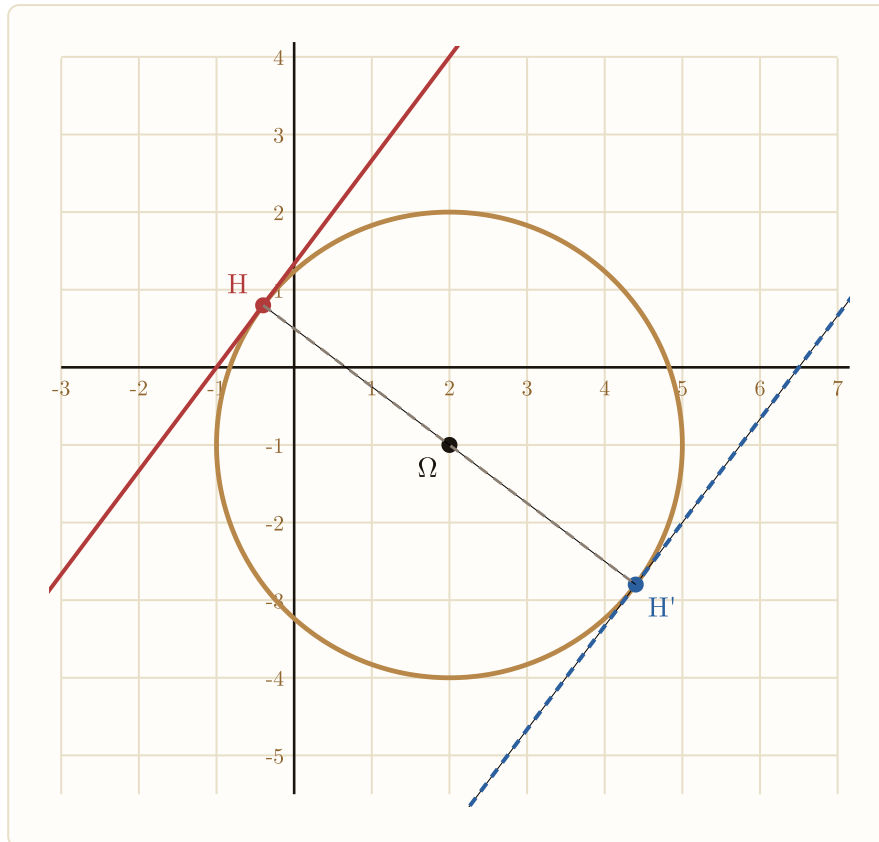
Pour $(2, 4, 10)$: $k = \frac{4 + 16}{4} - 10 = -5 < 0$.

Le script affiche `('point', (2.0, -3.0))`, puis `('cercle', (-1.0, 2.0), 2.0)`, puis `'ensemble vide'`.

Exercice 9 (★★★) : tangente et projeté orthogonal

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3, et $d : 4x - 3y + 4 = 0$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H de Ω sur d .
2. Calculer ΩH , vérifier que $H \in \mathcal{C}$, puis conclure que d est la tangente à $\mathcal{C}$ en H .
3. Déterminer l'équation de l'autre tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à d .



Le cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3, et ses deux tangentes de vecteur normal $(4; -3)$

Correction de l'exercice 9

Question 1

Un vecteur normal à d est $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. On pose $H = \Omega + t\vec{n} = (2 + 4t; -1 - 3t)$.

$$H \in d \iff 4(2 + 4t) - 3(-1 - 3t) + 4 = 0 \iff 8 + 16t + 3 + 9t + 4 = 0 \iff 25t = -15 \iff t = -\frac{3}{5}.$$

$$H \left(-\frac{2}{5}; \frac{4}{5} \right).$$

Question 2

$\overrightarrow{\Omega H} = t \vec{n}$, donc $\Omega H = \frac{3}{5} \times 5 = 3$. Ainsi $\Omega H = r$ et $H \in \mathcal{C}$ (on peut aussi vérifier : $\left(-\frac{2}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{5} + 1\right)^2 = \frac{144}{25} + \frac{81}{25} = 9$).

De plus $H \in d$ et $\overrightarrow{\Omega H}$ est colinéaire au vecteur normal de d : d est perpendiculaire à (ΩH) en H .

d est la tangente à $\mathcal{C}$ en H .

Question 3

L'autre tangente parallèle à d touche le cercle au point H' symétrique de H par rapport à Ω :

$$H' = 2\Omega - H = \left(\frac{22}{5}; -\frac{14}{5}\right).$$

Elle a le même vecteur normal : $4x - 3y + c = 0$ et H' donne $\frac{88}{5} + \frac{42}{5} + c = 0 \iff c = -26$.

La seconde tangente est $4x - 3y - 26 = 0$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Écrire** l'équation d'un cercle (exercices 1 et 3).
- **Reconnaître** un cercle avec la forme canonique (exercices 2 et 8).
- **Déterminer une tangente** (exercices 4 et 9).
- **Intersection** d'un cercle et d'une droite parallèle à un axe (exercice 5).
- **Cercle de diamètre** $[AB]$ et triangle rectangle (exercices 3 et 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Le cercle de centre $(1; -2)$ et de rayon 3 a pour équation :

- A. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ (**bonne réponse**)
- B. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
- C. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3$
- D. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$

Justification : Le centre est $(a; b) = (1; -2)$ et le second membre est $r^2 = 9$.

2. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ est le cercle de centre :

- A. $(3; -1)$
- B. $(-3; 1)$ (**bonne réponse**)
- C. $(3; 1)$

D. $(-3; -1)$

Justification : $x + 3 = x - (-3)$ et $y - 1 = y - 1$.

3. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :

A. $MA = MB$

B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (bonne réponse)

C. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

D. $MA + MB = AB$

Justification : $\widehat{AMB}$ est droit.

4. La tangente en A à un cercle de centre Ω est :

A. parallèle à (ΩA)

B. perpendiculaire à (ΩA) (bonne réponse)

C. la droite (ΩA)

D. confondue avec le rayon

Justification : La tangente est orthogonale au rayon au point de contact.

5. Pour $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$, l'ensemble est :

A. un cercle de rayon 13

B. un point (bonne réponse)

C. un cercle de rayon 2

D. l'ensemble vide

Justification : $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4 + 9 - 13 = 0$: le point $(2; -3)$.

6. Les points communs du cercle $x^2 + y^2 = 25$ et de la droite $y = 3$ sont :

A. $(-4; 3)$ et $(4; 3)$ (bonne réponse)

B. $(3; 4)$ et $(3; -4)$

C. $(3; 0)$ seulement

D. aucun point

Justification : On remplace y par 3 : $x^2 + 9 = 25$, donc $x = \pm 4$.