

Fiche 1 : droites et vecteurs normaux

Dix exercices pour maîtriser les **droites et les vecteurs normaux** :

- lire une équation cartésienne ;
- droite définie par un point et un vecteur normal ;
- droite passant par deux points ;
- parallèle et perpendiculaire ;
- médiatrice ;
- vrai/faux ;
- projeté orthogonal d'un point sur une droite (avec deux méthodes) ;
- pourquoi $(a; b)$ est normal à $ax+by+c=0$;
- un script Python.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le **vecteur normal** ou **directeur** est écrit avant l'équation ;
- le coefficient c est **calculé** avec un point de la droite ;
- chaque équation est **vérifiée** avec un point.

Le modèle de rédaction pour une équation de droite

« $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) , donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal. $(AB) : 4x - 3y + c = 0$. A appartient à la droite : $c = \dots$ »

- **Calcule** un vecteur directeur ou un vecteur normal.
- **Écris** l'équation avec c inconnu.
- **Calcule** c avec un point, puis **vérifie** avec un second point.

Les pièges classiques

- Confondre vecteur normal et vecteur directeur.
- Se tromper de signe en calculant c .
- Oublier de vérifier avec le deuxième point.
- Écrire que deux droites sont perpendiculaires alors que les vecteurs normaux sont colinéaires.

Une équation de droite sans vérification, c'est un soufflé qu'on sert sans l'avoir regardé : parfois ça passe, souvent ça retombe.

Exercice 1 (★) : lire une équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, la droite d a pour équation $2x - 3y + 6 = 0$.

1. Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de d .
2. Les points $A(0; 2)$, $B(3; 4)$ et $C(1; 1)$ appartiennent-ils à d ?
3. Donner l'équation réduite de d .

Exercice 2 (★) : un point et un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, $A(1; 2)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation de la droite d passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Le point $B(2; 5)$ est-il sur d ?
3. Donner un vecteur directeur de d .

Exercice 3 (★★) : une droite par deux points

Dans un repère orthonormé, $A(2; -1)$ et $B(5; 3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et en déduire un vecteur normal à (AB) .
2. Déterminer une équation cartésienne de (AB) .
3. Vérifier avec les coordonnées de B puis donner l'équation réduite.

Exercice 4 (★★) : parallèle et perpendiculaire

Dans un repère orthonormé, $d : 3x + 2y - 6 = 0$ et $P(1; 1)$.

1. Déterminer une équation de la droite Δ parallèle à d passant par P .
2. Déterminer une équation de la droite Δ' perpendiculaire à d passant par P .
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection de d et Δ' .

Exercice 5 (★★) : médiatrice

Dans un repère orthonormé, $A(1; 2)$ et $B(5; 4)$.

1. Calculer le milieu I de $[AB]$ et $\overrightarrow{AB}$.
2. En déduire une équation de la médiatrice de $[AB]$.
3. Vérifier que le point $M(4; 1)$ est équidistant de A et B .

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Une droite a une seule équation cartésienne.
2. Les droites $2x + 3y + 1 = 0$ et $4x + 6y - 5 = 0$ sont parallèles.
3. Les droites $2x + 3y + 1 = 0$ et $3x - 2y + 5 = 0$ sont perpendiculaires.
4. Un vecteur normal à la droite $y = 2x + 1$ est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (★★) : projeté orthogonal

Dans un repère orthonormé, $d : 3x + 4y - 20 = 0$ et $M(0; 0)$.

1. Donner un vecteur normal à d puis écrire les coordonnées de $H = M + t\vec{n}$.
2. Déterminer t puis les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur d .
3. En déduire la distance de M à d .

Exercice 8 (★★) : projeté orthogonal, deux méthodes

Dans un repère orthonormé, $d : 2x + y - 3 = 0$ et $M(-1; 4)$.

1. Déterminer une équation de la perpendiculaire Δ à d passant par M .
2. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur d .
3. Retrouver H avec la méthode $H = M + t\vec{n}$, puis calculer la distance MH .
4. Déterminer le symétrique M' de M par rapport à d .

Exercice 9 (★★★) : pourquoi $(a; b)$ est normal

Dans un repère orthonormé, $d : 3x - 2y + 5 = 0$.

1. Vérifier que $A(1; 4)$ et $B(3; 7)$ sont sur d , puis que $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit $d' : ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de d' . Démontrer que $\vec{n}(a; b)$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
3. En déduire une équation de la parallèle à d passant par O , puis de la perpendiculaire à d passant par O .

Exercice 10 (★★) : un script pour le projeté orthogonal

On considère le script Python suivant :

```
def projete(xM, yM, a, b, c):
    # projeté orthogonal de M sur la droite ax + by + c = 0
    t = -(a * xM + b * yM + c) / (a**2 + b**2)
    return round(xM + t * a, 6), round(yM + t * b, 6)
```

1. Justifier que `projete(xM, yM, a, b, c)` renvoie le projeté orthogonal de $M(x_M; y_M)$ sur la droite $ax + by + c = 0$.
2. Que renvoie `projete(0, 0, 3, 4, -20)` ? Comparer avec l'exercice 7.
3. Que renvoie `projete(-1, 4, 2, 1, -3)` ? Comparer avec l'exercice 8.

Ce qui peut tomber en contrôle

- Lire un vecteur normal ou directeur (exercice 1).
- Écrire l'équation d'une droite (exercices 2 et 3).
- Parallèle et perpendiculaire à une droite donnée (exercice 4).
- Médiatrice d'un segment (exercice 5).
- Projeté orthogonal d'un point sur une droite (exercices 7, 8 et 10).
- Justifier qu'un vecteur est normal à une droite (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Un vecteur normal à la droite $3x - 4y + 7 = 0$ est :

A. $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

- B. $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Un vecteur directeur de $x + 2y - 5 = 0$ est :

- A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. La droite passant par $A(1; 2)$ de vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pour équation :

- A. $2x + y - 4 = 0$
 B. $x + 2y - 5 = 0$
 C. $2x + y + 4 = 0$
 D. $2x - y = 0$

4. $2x + y - 1 = 0$ et $x - 2y + 3 = 0$ sont :

- A. parallèles
 B. perpendiculaires
 C. confondues
 D. sécantes non perpendiculaires

5. Un point M est sur la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si :

- A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$
 B. $MA = MB$
 C. $MA \cdot MB = 0$
 D. M appartient à (AB)

6. Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d de vecteur normal $\vec{n}$ est le point de d tel que :

- A. $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{n}$
 B. $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à $\vec{n}$
 C. H a la même abscisse que M
 D. H est le milieu de $[M; O]$