

Fiche 1 : droites et vecteurs normaux

Dix exercices pour maîtriser les **droites** et les **vecteurs normaux** :

- lire une équation cartésienne ;
- droite définie par un point et un vecteur normal ;
- droite passant par deux points ;
- parallèle et perpendiculaire ;
- médiatrice ;
- vrai/faux ;
- projeté orthogonal d'un point sur une droite (avec deux méthodes) ;
- pourquoi $(a; b)$ est normal à $ax+by+c=0$;
- un script Python.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le **vecteur normal** ou **directeur** est écrit avant l'équation ;
- le coefficient c est **calculé** avec un point de la droite ;
- chaque équation est **vérifiée** avec un point.

Le modèle de rédaction pour une équation de droite

« $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) , donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal. $(AB) : 4x - 3y + c = 0$. A appartient à la droite : $c = \dots$ »

- **Calcule** un vecteur directeur ou un vecteur normal.
- **Écris** l'équation avec c inconnu.
- **Calcule** c avec un point, puis **vérifie** avec un second point.

Les pièges classiques

- Confondre vecteur normal et vecteur directeur.
- Se tromper de signe en calculant c .
- Oublier de vérifier avec le deuxième point.
- Écrire que deux droites sont perpendiculaires alors que les vecteurs normaux sont colinéaires.

Une équation de droite sans vérification, c'est un soufflé qu'on sert sans l'avoir regardé : parfois ça passe, souvent ça retombe.

Exercice 1 (★) : lire une équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, la droite d a pour équation $2x - 3y + 6 = 0$.

1. Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de d .
2. Les points $A(0; 2)$, $B(3; 4)$ et $C(1; 1)$ appartiennent-ils à d ?
3. Donner l'équation réduite de d .

Correction de l'exercice 1

Question 1

Pour $ax + by + c = 0$, $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

Question 2

$A : 2 \times 0 - 3 \times 2 + 6 = 0$. Donc $A \in d$.

$B : 2 \times 3 - 3 \times 4 + 6 = 6 - 12 + 6 = 0$. Donc $B \in d$.

$C : 2 \times 1 - 3 \times 1 + 6 = 5 \neq 0$. Donc $C \notin d$.

$A \in d$, $B \in d$ et $C \notin d$.

Question 3

$$2x - 3y + 6 = 0 \iff 3y = 2x + 6 \iff y = \frac{2}{3}x + 2.$$

$$d : y = \frac{2}{3}x + 2.$$

Exercice 2 (★) : un point et un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, $A(1; 2)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation de la droite d passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Le point $B(2; 5)$ est-il sur d ?
3. Donner un vecteur directeur de d .

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$M(x; y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ avec } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}.$$

$$3(x-1) - (y-2) = 0 \iff 3x - 3 - y + 2 = 0.$$

$$d : 3x - y - 1 = 0.$$

Question 2

$$3 \times 2 - 5 - 1 = 0. \text{ Donc } B \in d.$$

Oui, B appartient à d .

Question 3

$$\text{Pour } ax + by + c = 0, \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}; \text{ ici } a = 3 \text{ et } b = -1.$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d. \text{ (On vérifie : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.)$$

Exercice 3 (★★) : une droite par deux points

Dans un repère orthonormé, $A(2; -1)$ et $B(5; 3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et en déduire un vecteur normal à (AB) .
2. Déterminer une équation cartésienne de (AB) .
3. Vérifier avec les coordonnées de B puis donner l'équation réduite.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ est normal à } (AB), \text{ car } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 3 - 3 \times 4 = 0.$$

Question 2

$$M(x; y) \in (AB) \iff 4(x-2) - 3(y+1) = 0 \iff 4x - 8 - 3y - 3 = 0.$$

$$(AB) : 4x - 3y - 11 = 0.$$

Question 3

$$B : 4 \times 5 - 3 \times 3 - 11 = 20 - 9 - 11 = 0. \text{ C'est cohérent.}$$

$$4x - 3y - 11 = 0 \iff y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}.$$

$$(AB) : y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}.$$

Exercice 4 (★★) : parallèle et perpendiculaire

Dans un repère orthonormé, $d : 3x + 2y - 6 = 0$ et $P(1; 1)$.

1. Déterminer une équation de la droite Δ parallèle à d passant par P .
2. Déterminer une équation de la droite Δ' perpendiculaire à d passant par P .
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection de d et Δ' .

Correction de l'exercice 4

Question 1

$\Delta \parallel d$: même vecteur normal $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\Delta : 3x + 2y + c = 0$.

$$P \in \Delta : 3 + 2 + c = 0 \iff c = -5.$$

$$\Delta : 3x + 2y - 5 = 0.$$

Question 2

$\Delta' \perp d$: le vecteur normal de d est un vecteur directeur de Δ' , donc Δ' a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (orthogonal à $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$).

$$\Delta' : 2x - 3y + c = 0 \text{ et } P \in \Delta' : 2 - 3 + c = 0 \iff c = 1.$$

$$\Delta' : 2x - 3y + 1 = 0.$$

Question 3

On résout $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$. En multipliant par 3 et 2 : $9x + 6y = 18$ et $4x - 6y = -2$.

$$\text{On additionne : } 13x = 16, \text{ donc } x = \frac{16}{13}. \text{ Puis } y = \frac{6 - 3x}{2} = \frac{6 - \frac{48}{13}}{2} = \frac{15}{13}.$$

Le point d'intersection est $\left(\frac{16}{13}; \frac{15}{13}\right)$.

Exercice 5 (★★) : médiatrice

Dans un repère orthonormé, $A(1; 2)$ et $B(5; 4)$.

1. Calculer le milieu I de $[AB]$ et $\overrightarrow{AB}$.
2. En déduire une équation de la médiatrice de $[AB]$.
3. Vérifier que le point $M(4; 1)$ est équidistant de A et B .

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$I\left(\frac{1+5}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = (3; 3) \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$I(3; 3) \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Question 2

La médiatrice passe par I et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB} : 4(x - 3) + 2(y - 3) = 0 \iff 4x + 2y - 18 = 0$.

La médiatrice est la droite $2x + y - 9 = 0$.

Question 3

$2 \times 4 + 1 - 9 = 0$ donc M est sur la médiatrice.

$$MA^2 = (4 - 1)^2 + (1 - 2)^2 = 9 + 1 = 10 \text{ et } MB^2 = (4 - 5)^2 + (1 - 4)^2 = 1 + 9 = 10.$$

$MA = MB = \sqrt{10} : M$ est bien équidistant de A et B .

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Une droite a une seule équation cartésienne.
2. Les droites $2x + 3y + 1 = 0$ et $4x + 6y - 5 = 0$ sont parallèles.
3. Les droites $2x + 3y + 1 = 0$ et $3x - 2y + 5 = 0$ sont perpendiculaires.
4. Un vecteur normal à la droite $y = 2x + 1$ est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

On peut multiplier l'équation par un réel non nul : $x + y - 2 = 0$ et $2x + 2y - 4 = 0$ décrivent la même droite.

Faux.

Affirmation 2

Vecteurs normaux $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$: colinéaires ($2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$).

Vrai.

Affirmation 3

$2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux.

Vrai.

Affirmation 4

$y = 2x + 1 \iff 2x - y + 1 = 0$: un vecteur normal est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vrai.

Exercice 7 (★★) : projeté orthogonal

Dans un repère orthonormé, $d : 3x + 4y - 20 = 0$ et $M(0; 0)$.

1. Donner un vecteur normal à d puis écrire les coordonnées de $H = M + t\vec{n}$.
2. Déterminer t puis les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur d .
3. En déduire la distance de M à d .

Correction de l'exercice 7

Question 1

Un vecteur normal est $\vec{n}(3; 4)$.

$H(3t; 4t)$.

Question 2

$$H \in d \iff 3 \times 3t + 4 \times 4t - 20 = 0 \iff 25t = 20 \iff t = \frac{4}{5}.$$

$$H\left(\frac{12}{5}; \frac{16}{5}\right) = (2,4; 3,2).$$

Question 3

$$MH = \sqrt{2,4^2 + 3,2^2} = \sqrt{5,76 + 10,24} = \sqrt{16}.$$

La distance de M à d vaut 4.

Exercice 8 (★★) : projeté orthogonal, deux méthodes

Dans un repère orthonormé, $d : 2x + y - 3 = 0$ et $M(-1; 4)$.

1. Déterminer une équation de la perpendiculaire Δ à d passant par M .
2. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur d .
3. Retrouver H avec la méthode $H = M + t\vec{n}$, puis calculer la distance MH .
4. Déterminer le symétrique M' de M par rapport à d .

Correction de l'exercice 8

Question 1

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à d , donc directeur de Δ . Un vecteur normal à Δ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (car $2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0$).

$$\Delta : x - 2y + c = 0 \text{ et } M \in \Delta : -1 - 8 + c = 0 \iff c = 9.$$

$$\Delta : x - 2y + 9 = 0.$$

Question 2

$$H \text{ est le point d'intersection de } d \text{ et } \Delta : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -9 \end{cases}.$$

La seconde équation donne $x = 2y - 9$. Dans la première : $2(2y - 9) + y = 3 \iff 5y = 21 \iff y = \frac{21}{5}$, puis $x = \frac{42}{5} - 9 = -\frac{3}{5}$.

$$H \left(-\frac{3}{5}; \frac{21}{5} \right). \text{ On vérifie : } 2 \times \left(-\frac{3}{5} \right) + \frac{21}{5} - 3 = 0.$$

Question 3

$$H(-1 + 2t; 4 + t) \in d \iff 2(-1 + 2t) + 4 + t - 3 = 0 \iff 5t = 1 \iff t = \frac{1}{5}.$$

On retrouve $H \left(-1 + \frac{2}{5}; 4 + \frac{1}{5} \right) = \left(-\frac{3}{5}; \frac{21}{5} \right)$. Comme $\overrightarrow{MH} = t\vec{n}$, $MH = \frac{1}{5}\|\vec{n}\| = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,45$.

$$MH = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Question 4

$$H \text{ est le milieu de } [MM'], \text{ donc } M' = 2H - M = \left(-\frac{6}{5} + 1; \frac{42}{5} - 4 \right).$$

$$M' \left(-\frac{1}{5}; \frac{22}{5} \right). \text{ Le milieu de } [MM'] \text{ est bien } H.$$

Exercice 9 (★★★) : pourquoi $(a; b)$ est normal

Dans un repère orthonormé, $d : 3x - 2y + 5 = 0$.

1. Vérifier que $A(1; 4)$ et $B(3; 7)$ sont sur d , puis que $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit $d' : ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de d' . Démontrer que $\vec{n}(a; b)$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
3. En déduire une équation de la parallèle à d passant par O , puis de la perpendiculaire à d passant par O .

Correction de l'exercice 9

Question 1

$A : 3 \times 1 - 2 \times 4 + 5 = 0$. $B : 3 \times 3 - 2 \times 7 + 5 = 0$. Donc $A \in d$ et $B \in d$.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 2 + (-2) \times 3 = 0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

Question 2

Comme $A \in d'$ et $B \in d' : ax_A + by_A + c = 0$ et $ax_B + by_B + c = 0$.

On soustrait : $a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0$, c'est-à-dire $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Le vecteur non nul $\vec{n}(a; b)$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ de d' : c'est un vecteur normal de d' .

Question 3

La parallèle a le même vecteur normal $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} : 3x - 2y + c = 0$, et O donne $c = 0$.

La perpendiculaire a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (orthogonal à $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ car $6 - 6 = 0$) : $2x + 3y + c = 0$, et O donne $c = 0$.

Parallèle : $3x - 2y = 0$. Perpendiculaire : $2x + 3y = 0$.

Exercice 10 (★★) : un script pour le projeté orthogonal

On considère le script Python suivant :

```
def projete(xM, yM, a, b, c):
    # projeté orthogonal de M sur la droite ax + by + c = 0
    t = -(a * xM + b * yM + c) / (a**2 + b**2)
    return round(xM + t * a, 6), round(yM + t * b, 6)
```

1. Justifier que `projete(xM, yM, a, b, c)` renvoie le projeté orthogonal de $M(x_M; y_M)$ sur la droite $ax + by + c = 0$.
2. Que renvoie `projete(0, 0, 3, 4, -20)` ? Comparer avec l'exercice 7.
3. Que renvoie `projete(-1, 4, 2, 1, -3)` ? Comparer avec l'exercice 8.

Correction de l'exercice 10**Question 1**

Le point $H = M + t\vec{n}$ a pour coordonnées $(x_M + ta; y_M + tb)$. Il est sur la droite si et seulement si $a(x_M + ta) + b(y_M + tb) + c = 0$, c'est-à-dire $t(a^2 + b^2) = -(ax_M + by_M + c)$.

Comme $(a; b) \neq (0; 0)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ et on peut diviser : c'est la ligne $t = \dots$. Le vecteur $\overrightarrow{MH} = t\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{n}$: H est le projeté orthogonal.

Question 2

Ici $t = -\frac{-20}{25} = 0,8$, donc $H(0 + 0,8 \times 3; 0 + 0,8 \times 4)$.

Le script affiche $(2.4, 3.2)$, c'est le résultat de l'exercice 7.

Question 3

Ici $t = -\frac{2 \times (-1) + 4 - 3}{5} = \frac{1}{5}$, donc $H\left(-1 + \frac{2}{5}; 4 + \frac{1}{5}\right)$.

Le script affiche $(-0.6, 4.2)$, c'est $\left(-\frac{3}{5}; \frac{21}{5}\right)$ de l'exercice 8.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Lire** un vecteur normal ou directeur (exercice 1).
- **Écrire** l'équation d'une droite (exercices 2 et 3).
- **Parallèle et perpendiculaire** à une droite donnée (exercice 4).
- **Médiatrice** d'un segment (exercice 5).
- **Projeté orthogonal** d'un point sur une droite (exercices 7, 8 et 10).
- **Justifier** qu'un vecteur est normal à une droite (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Un vecteur normal à la droite $3x - 4y + 7 = 0$ est :

- A. $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ (bonne réponse)
 B. $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

Justification : Pour $ax + by + c = 0$, $\vec{n}(a; b)$ est normal.

2. Un vecteur directeur de $x + 2y - 5 = 0$ est :

- A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (bonne réponse)
 D. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Justification : $\vec{u}(-b; a) = (-2; 1)$.

3. La droite passant par $A(1; 2)$ de vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pour équation :

- A. $2x + y - 4 = 0$ (bonne réponse)
 B. $x + 2y - 5 = 0$
 C. $2x + y + 4 = 0$
 D. $2x - y = 0$

Justification : $2(x - 1) + (y - 2) = 0 \iff 2x + y - 4 = 0$.

4. $2x + y - 1 = 0$ et $x - 2y + 3 = 0$ sont :

- A. parallèles
- B. **perpendiculaires (bonne réponse)**
- C. confondues
- D. sécantes non perpendiculaires

Justification : $2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0$.

5. Un point M est sur la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si :

- A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$
- B. $MA = MB$ **(bonne réponse)**
- C. $MA \cdot MB = 0$
- D. M appartient à (AB)

Justification : La médiatrice est l'ensemble des points équidistants de A et B .

6. Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d de vecteur normal $\vec{n}$ est le point de d tel que :

- A. $\overrightarrow{MH}$ est **colinéaire à $\vec{n}$ (bonne réponse)**
- B. $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à $\vec{n}$
- C. H a la même abscisse que M
- D. H est le milieu de $[M; O]$

Justification : $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à la droite, donc colinéaire à son vecteur normal : $H = M + t\vec{n}$.